

ESERCIZI REDUCTION STRATEGIES - Alcune soluzioni -

Esercizio 3 (By Guastella and Tumbarello)

Una strategia di riduzione, vista come relazione di riduzione su insiemi di coppie del tipo (M, N) , è deterministica quando, dato un termine M , esiste, nell'insieme di tutte le possibili coppie, una ed una sola coppia che ha M come primo termine. Per verificare il determinismo della strategia in esame, dovremmo quindi analizzare tutte le possibili coppie; ma ciò sarebbe possibile solo se l'insieme delle possibili coppie è finito e ragionevolmente piccolo, cosa non sempre vera. D'altro canto è possibile generare l'insieme (anche infinito) di tutte le possibili coppie tramite assiomi e regole di inferenza che ci dicono quale regola applicare se un termine è di un particolare tipo. In questo caso il determinismo può essere dimostrato dimostrando che ogni regola si applica esattamente ad un tipo di termine e quindi per ogni M esiste al più un termine N tale che $M \rightarrow N$ ed N ha la struttura di una regola predefinita oppure nessuna regola è più applicabile e quindi N è in forma normale. Supponiamo di usare la seguente grammatica:

$$M ::= x \mid MN \mid \lambda x:s.M$$

Determinismo della strategia Leftmost-Outermost

N.B. scriveremo $\rightarrow$ intendendo $\rightarrow_{\text{left}}$

Assiomi:

(1) $(\lambda x : s.M)N \rightarrow M[N/x]$

Regole di inferenza:

(2)
$$\frac{M \rightarrow M'}{\quad} \quad \text{se } M \text{ non è nella forma } \lambda x:s.P$$

;

$$MN \rightarrow M'N$$

(3)
$$\frac{N \rightarrow N'}{MN \rightarrow MN'} \quad \text{se } M \text{ è in forma normale}$$

(4)
$$\frac{M \rightarrow M'}{\lambda x:s.M \rightarrow \lambda x:s.M'}$$

Potremmo aggiungere altre regole in base alla grammatica ovvero in base all'insieme dei possibili termini; in PCF, ad esempio, per ogni costante dovrei aggiungere un nuovo assioma: ad esempio:

...

$$\text{succ } \underline{n} \rightarrow \underline{n+1}$$
$$\text{zero? } \underline{0} \rightarrow \text{tt}$$

Dato un termine P esso è in forma normale se la sua struttura non figura a sinistra di nessuna delle regole di inferenza o degli assiomi e ciò porta l'interprete a fermarsi.

L'interprete, dato un termine P , analizza la struttura del termine ovvero dei suoi possibili sottotermini e si trova dunque in uno dei seguenti possibili casi:

- P è una variabile x che è dunque in forma normale
- P è una lambda astrazione cioè è nella forma $\lambda x:s.M$ e quindi l'interprete dovrà applicare l'assioma (4) riducendo M
- P una applicazione del tipo MN ed allora esaminerà M trovando:

- M è nella forma $\lambda x:s.T$ e quindi l'interprete dovrà applicare univocamente l' assioma (1)
- M non è nella forma $\lambda x:s.T$ e non è in forma normale cioè la sua struttura è contemplata in una delle regole o degli assiomi e quindi applicherò (2) cioè l' algoritmo riparte dal primo passo per M
- M ha una struttura non contemplata cioè è in forma normale e allora applicherò la (3) ovvero applicherò l' algoritmo dall' inizio per N

In definitiva il determinismo si ha perchè in ogni istante di computazione l' interprete è in grado di scegliere quale regola applicare in maniera univoca.

Questi ragionamenti valgono con le opportune modifiche anche per una grammatica diversa o più estesa tipo quella del PCF a meno di dare le regole per tutti i possibili termini in maniera non ambigua.

Determinismo della strategia Lazy

N.B. scriveremo $\rightarrow$ intendendo $\rightarrow_{\text{lazy}}$

Assiomi:

(1) $(\lambda x : s.M)N \rightarrow M[N/x]$

Regole di inferenza:

(2)
$$\frac{M \rightarrow M'}{s.P \quad MN \rightarrow M'N} \quad \text{se } M \text{ non è nella forma } \lambda x :$$

Anche qui potremmo aggiungere, ad esempio, il termine $M+N$ come nel PCF alla grammatica e quindi gli assiomi :

con $\underline{n}$ numerale
$$\frac{M \rightarrow M'}{M + N \rightarrow M' + N} \quad \frac{N \rightarrow N'}{\underline{n} + N \rightarrow \underline{n} + N'}$$

Anche qui il determinismo è facilmente dimostrabile con gli stessi ragionamenti di prima col vantaggio di avere meno regole da applicare per il fatto che la lazy è una restrizione della leftmost outermost.

Esercizio 5

"ri" sta per rightmost-innermost

Axiom

$(\lambda x.M)N \rightarrow_{\text{ri}} M[N/x]$ se M ed N sono in forma normale

Rules

$$\frac{N \rightarrow_{\text{ri}} N'}{MN \rightarrow_{\text{ri}} MN'} \quad \frac{M \rightarrow_{\text{ri}} M' \quad N \text{ in normal form}}{MN \rightarrow_{\text{ri}} M'N}$$

$$\frac{M \rightarrow_{\text{ri}} M'}{\lambda x.M \rightarrow_{\text{ri}} \lambda x.M'}$$