Teorema 1 (PUMPING LEMMA) *Per ogni linguaggio regolare L esiste una costante n tale che, se $z \in L$ e $|z| \geq n$, allora possiamo scrivere $z = uvw$, con $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ e ottenere che $uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$.*

Proof. Dato un linguaggio regolare L esiste un $ASFD$ che lo riconosce. Sia $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ un automa che riconosce L e sia $|Q| = n$. Sia $z \in L$, con $|z| = k \geq n$. In tal caso deve necessariamente valere che $\delta(q_0, z) \in F$.

Supponiamo che $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ sia la sequenza di stati attraversati da $\mathcal{A}$ durante la computazione su z, con $q_{i_0} = q_0$ e $q_{i_k} = \overline{\delta}(q_0, z) \in F$.

In altre parole q_{i_1} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto il primo simbolo di z, q_{i_2} lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto i primi due simboli di z,q_{i_3} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto i primi tre simboli di z e cosi' via.

Se indichiamo con z_h il prefisso di z di lunghezza h, allora avremo che q_{i_h} e' lo stato in cui arriva l'automa $\mathcal{A}$ dopo aver letto z_h cioe' $q_{i_h} = \overline{\delta}(q_0, z_h)$.

Dal momento che $k \geq n$, deve esistere almeno uno stato in cui l'automa si porta almeno due volte durante la computazione su z cioe' esistono due stati nella sequenza $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}$ che coincidono. In realta' questi due stati che coincidono si possono trovare gia' tra i primi $n + 1$ elementi della sequenza cioe' in $q_{i_0}, q_{i_1}, \ldots, q_{i_n}$.

Possiamo quindi affermare che

esistono due indici r, s con $0 \leq r < s \leq n$ tali che $q_{i_r} = q_{i_s}$.

Cioe' lo stato in cui arriva l'automa leggendo il prefisso di z di lunghezza r (leggendo cioe' z_r) e' esattamente lo stesso stato a cui arriva l'automa leggendo il prefisso di z di lunghezza s (leggendo cioe' z_s) cioe' ancora

$$\overline{\delta}(q_0, z_r) = q_{i_r} = q_{i_s} = \overline{\delta}(q_0, z_s) \qquad (*).$$

Poniamo $\quad u = z_r \qquad uv = z_s \qquad uvw = z.$

Chiaramente $|uv| = |z_s| = s \leq n$ e

$|v| \geq 1$ (perche' $|u| = |z_r| = r < s = |z_s| = |uv|$).

Inoltre $uv^iw \in L$ per ogni $i \geq 0$. Per induzione su i.

Passo Base: $i = 0$.

$$\overline{\delta}(q_o, uv^0w) = \overline{\delta}(q_o, u\epsilon w) = \overline{\delta}(q_o, uw) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, u), w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_r), w) =$$
$$\text{(per la (*))} = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_s), w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, uv), w) = \overline{\delta}(q_o, uvw) = \overline{\delta}(q_o, z) \in F$$

cioe' $uv^0w = uw \in L$.

Passo Induttivo: sia $i > 0$.

Per ipotesi induttiva $uv^{i-1}w \in L$ cioe' $\overline{\delta}(q_o, uv^{i-1}w) \in F$. Allora

$$\overline{\delta}(q_o, uv^iw) = \overline{\delta}(q_o, uvv^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, uv), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_s), v^{i-1}w) =$$
$$\text{(per la (*))} = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, z_r), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(\overline{\delta}(q_o, u), v^{i-1}w) = \overline{\delta}(q_o, uv^{i-1}w) \in F$$

cioe' $uv^iw \in L$. □