Appunti del corso di Logica Matematica del prof. Simone Martini A.A. 1993/94

Fausto Spoto
Dipartimento di Informatica
Università di Pisa
e–mail: spoto@di.unipi.it
www–address: www.di.unipi.it/~spoto/intro.html

Giacomo Piccinelli
Dipartimento di Informatica
Università di Pisa
e–mail: piccinel@cli.di.unipi.it
www–address: www.cli.di.unipi.it/~piccinel/intro.html

Febbraio 1996

Nessuno potrà mai rapirci dal paradiso che Cantor ha creato per noi.

prof. David Hilbert

...David Hilbert lavorava all'Università di Guttinga, all'epoca una delle più rinomate quanto a studi matematici, poi sfasciata dai nazisti...

prof. Simone Martini

Questi appunti non pretendono assolutamente di sostituire un corso di logica matematica poiché essi sono incompleti e privi del necessario tono introduttivo necessario a chi si avvicina per la prima volta ad una materia scientifica così articolata. Essi possono invece essere di ottimo sussidio durante la frequenza di un corso sui fondamenti della logica matematica.

Un ringraziamento particolare va al professore Simone Martini, che molto pazientemente e con grande professionalità ha esposto gli argomenti qui brevemente raccolti, e che mi ha fornito l'aiuto di cui avevo bisogno per impaginare questo documento con LaTeX. Grazie inoltre a Giacomo Piccinelli, che si è impegnato a fornirmi gli appunti del corso quando, seguendo lezioni ben meno utili, non ho potuto essere presente a quelle di logica matematica.

Pisa, estate 1994
F.S.

La revisione di questi appunti ha comportato la correzione di un gran numero di errori presenti nella prima stesura; sono stati inoltre aggiunti due capitoli relativi al λ–calcolo e alle Reti di Petri, integralmente dovuti a Giacomo Piccinelli.

Pisa, febbraio 1996
G.P. e F.S.

Indice

Capitolo 1

La logica matematica

Il procedimento tramite il quale si passa da cose *vere* a cose *vere* è detto *inferenza*. Noi siamo interessati a dedurre delle argomentazioni *corrette*, cioè derivabili secondo dei puri meccanismi di trasformazione sintattica; infine a questo gioco di simboli vogliamo associare un *significato*: la *semantica*, fatta di strutture matematiche. Data una sintassi voglio che le sue trasformazioni abbiamo un *valore semantico* corretto (**correttezza** o validità); inversamente potrei richiedere che il *calcolo* sintattico sia sufficientemente potente da poter descrivere qualsiasi problema per cui è stato scritto (**completezza**).

Oggetto del corso: la deduzione naturale.

Metodo: una parte ristretta della matematica.

Non ci preoccuperemo certo degli aspetti fondazionali della logica matematica.

1.1 Patologie del processo deduttivo classico

Nel corso dei secoli, ma particolarmente nel nostro, si sono presentate delle incongruenze nel processo deduttivo classico che hanno spinto gli studiosi a cercare una formalizzazione dello stesso, nella convinzione che essa avrebbe escluso definitivamente tali fenomeni patologici. Il tentativo sarà destinato a fallire ma non per questo lo studio della logica matematica va considerato inutile, come avremo modo di osservare in seguito. Fra i paradossi più noti citiamo:

- il paradosso di Russel: diciamo che un insieme X è normale se e solo se $X \not\subset X$. Sia $N = \{X : X \text{ è normale }\}$. Ci chiediamo: $N \subset N$? Distinguiamo due casi:
  - $N \subset N$: allora N è normale e quindi $N \not\subset N$, assurdo;
  - $N \not\subset N$: allora N non è normale e quindi $N \subset N$, assurdo;
- il paradosso del mentitore (o del barbiere): *Questa frase è falsa*: ho detto il vero o il falso?

1.2 Applicazioni della logica matematica all'informatica

L'informatico guarda alla logica matematica come ad uno strumento: pur di raggiungere i fini per cui la ha studiata non si preoccupa di cambiare punto di vista o scuola di pensiero.

Le applicazioni tipiche della logica matematica all'informatica sono:

- programmazioni logica;

- intelligenza artificiale (filone simbolico);
- dimostrazione di correttezza dei programmi: weakest preconditions...
- caratterizzazione delle classi computazionali;
- teoremi limitativi di Church e Gödel;
- teoria della dimostrazione.

Capitolo 2

I Sistemi formali

2.1 I sistemi formali

Definizione 2.1 *Un sistema formale $\mathcal{D}$ è dato da:*

- *un insieme numerabile S (alfabeto o riserva di simboli);*
- *un insieme decidibile $W \subseteq S^*$ (insieme delle formule ben formate (fbf));*
- *un insieme $Ax \subseteq W$ (insieme degli assiomi); se Ax è decidibile, il sistema formale è detto ricorsivamente assiomatizzato;*
- *un insieme $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$, con $R_i \subseteq W_i^{n_i}$ con I ed $n_i \geq 2$ finiti (insieme finito di regole finitarie).*

La coppia $< S, W >$ è detta linguaggio formale.

Definizione 2.2 *Dicesi definizione esplicita la definizione di un termine che viene aggiunto all'alfabeto del linguaggio per significarne un'espressione.*

Notazione: se $R \subseteq W^3$ allora scriverò $R(\alpha, \beta, \gamma)$ nella forma $\frac{\alpha \quad \beta}{\gamma}$.

Definizione 2.3 *Dato un insieme M di fbf nel sistema formale $\mathcal{D}$, una $\mathcal{D}$-derivazione (prova, dimostrazione) a partire da M è una successione finita di fbf $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ di $\mathcal{D}$ tale che, per ogni $i = 1, \ldots, n$ si abbia:*

- *$\alpha_i \in Ax$ oppure*
- *$\alpha_i \in M$ oppure*
- *$(\alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_{n_j}}) \in R_j$ per qualche $j \in I$, $\alpha_i = \alpha_{h_{n_j}}$ e $h_1, \ldots, h_{n_j - 1} < i$.*

Definizione 2.4 *Una formula α è derivabile nel sistema formale $\mathcal{D}$ a partire da un insieme di ipotesi M se e solo se esiste una $\mathcal{D}$-derivazione a partire da M la cui ultima fbf è α. Scriveremo allora $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ e leggeremo: M deriva (prova) α nel sistema formale $\mathcal{D}$.*

Se M è vuoto scriveremo $\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ e leggeremo: α è un teorema in $\mathcal{D}$ (o di $\mathcal{D}$).

$M \not\vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ se e solo se non vale $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$.

Definizione 2.5 *Sia $\mathcal{R}$ l'insieme delle regole di un sistema formale $\mathcal{D}$; una regola $R : \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_k}{\alpha_{k+1}}$, $R \notin \mathcal{R}$, è detta derivabile in $\mathcal{D}$ se e solo se per tutte le fbf $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ che soddisfano R si ha: $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_{k+1}$.*

R è detta ammissibile (o eliminabile) in $\mathcal{D}$ se e solo se da $\Gamma \vdash_{\mathcal{D} \cup \{R\}} \alpha$ segue $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$, dove $\mathcal{D} \cup \{R\}$ denota il sistema formale ottenuto da $\mathcal{D}$ con l'aggiunta della regola R.

Proposizione 2.1 *Ogni regola derivabile è ammissibile.*
Dimostrazione: Data una derivazione: $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}\cup\{R\}} \alpha$, posso sostituire ogni applicazione della regola R con la corrispondente derivazione che esiste in $\mathcal{D}$ poiché R è derivabile. $\square$

Osservazione: l'inverso non è vero e ne vedremo un esempio in seguito (teorema 3.8)
Osservazione: una tecnica che si utilizza per dimostrare la reciproca non derivabilità di un insieme di assiomi è la seguente: prendendo come esempio $\mathcal{P}_0$, potremmo cercare una proprietà $\mathcal{I}$ che valga per due e solo due dei suoi tre assiomi, nonché invariante rispetto all'applicazione del modus ponens; il terzo assioma, per cui non vale $\mathcal{I}$, non potrà che essere indipendente dai primi due: in caso contrario, infatti, sarebbe derivato da essi per (ripetuta) applicazione del modus ponens, e per le proprietà di $\mathcal{I}$, $\mathcal{I}$ dovrebbe valere anche per esso, il che è per ipotesi falso.

Proposizione 2.2 *Se $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ allora esiste $N \subseteq M$, N finito, per il quale si ha: $N \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$. Quindi le dimostrazioni sono esponibili in tempo finito.*
Dimostrazione: $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ se e solo se esiste una sequenza $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \equiv \alpha$ che è una derivazione; solo un numero minore o uguale ad n, e quindi finito, delle α_i appartiene ad M, per cui basta prendere $N = M \cap \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ per ottenere la tesi. $\square$

Proposizione 2.3 *Se $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_1, \ldots, M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_n$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \vdash_{\mathcal{D}} \beta$, allora si avrà $M \vdash_{\mathcal{D}} \beta$.*

Dimostrazione: per ipotesi so che esiste una $\mathcal{D}$-derivazione $\beta_1, \ldots, \beta_k, \beta$ di β a partire da $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$; se per qualche i e j si ha $\beta_i = \alpha_j$, sostituisco β_i con la $\mathcal{D}$-derivazione $M \vdash_{\mathcal{D}} \alpha_j$. Così facendo ottengo una $\mathcal{D}$-derivazione con ipotesi solo in M. $\square$

Osservazione: quindi i lemmi, teoricamente, non sono necessari.

Definizione 2.6 *Un sistema formale $\mathcal{D}$ è detto consistente se e solo se esiste una fbf α di $\mathcal{D}$ tale che $\nvdash_{\mathcal{D}} \alpha$; se $\mathcal{D}$ non è consistente è detto inconsistente.*

Definizione 2.7 (Insieme delle conseguenze) *Sia Γ un insieme finito di fbf di un sistema formale $\mathcal{D}$; $Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) = \{\alpha \in W : \Gamma \vdash \alpha\}$.*

Definizione 2.8 *Sia Γ un insieme finito di fbf di un sistema formale $\mathcal{D}$.*

- *Γ è detto consistente (rispetto a $\mathcal{D}$) se e solo se esiste $\alpha \in W$ tale che $\Gamma \nvdash_{\mathcal{D}} \alpha$ (ovvero se e solo se $Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) \neq W$);*
- *Γ è detto inconsistente (rispetto a $\mathcal{D}$) o contraddittorio (rispetto a $\mathcal{D}$) se e solo se Γ non è consistente.*

Osservando che $\Gamma \subseteq Con_{\mathcal{D}}(\Gamma)$, si ha:

Definizione 2.9 (Teoria) *Un insieme di fbf Γ di un sistema formale $\mathcal{D}$ è detto teoria in $\mathcal{D}$ se e solo se Γ è chiuso rispetto alla relazione $\vdash_{\mathcal{D}}$ (ovvero se e solo se $Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) = \Gamma$, ovvero ancora se e solo se da $\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \alpha$ segue $\alpha \in \Gamma$).*

Definizione 2.10 (Teoria pura) *La teoria pura di un sistema formale $\mathcal{D}$ è l'insieme $Con_{\mathcal{D}}(\emptyset) = Con_{\mathcal{D}}(Ax)$.*

Osservazione: una teoria pura è una teoria.
Osservazione: può capitare che si abbia $\Gamma \neq \Gamma'$ e ciò nonostante che $Con_{\mathcal{D}}(\Gamma) = Con_{\mathcal{D}}(\Gamma')$.

2.2 $\mathcal{CL}$: un esempio di sistema formale

Definizione 2.11 (Il sistema formale $\mathcal{CL}$) *Chiamiamo sistema formale $\mathcal{CL}$ il sistema formale così definito:*

- $S = \{k, s, (,), =\}$ *(alfabeto);*
- $W = \{P = Q | P, Q \in \tau\}$ *dove τ è l'insieme dei termini così definito:*
  1. $k \in \tau, d \in \tau$;
  2. *se $P, Q \in \tau$ allora $(PQ) \in \tau$;*
  3. *nient'altro è un termine;*
- Ax: *per ogni $P, Q, R \in \tau$ i seguenti sono schemi di assioma:*
  - $((kP)Q) = P \quad (Axk)$;
  - $P = P$ *(assioma di riflessività);*
  - $(((sP)Q)R) = ((PR)(QR)) \quad (Axs)$;
  - *nient'altro è un assioma. (Si noti che uno schema di assioma è un modo per descrivere un numero eventualmente infinito di assiomi con un'unica espressione).*
- $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$ *dove:*
  - $R_1 = \{(P = Q, Q = P) | P, Q \in \tau\} \subseteq W^2$
    ovvero: $\frac{P=Q}{Q=P}$;
  - $R_2 = \{(P = Q, Q = R, P = R) | P, Q, R \in \tau\} \subseteq W^3$
    ovvero: $\frac{P=Q \quad Q=P}{P=R} \quad (TRANS)$;
  - $R_3 = \{(R = R', (PR) = (QR), (PR) = (QR')) | P, Q, R, R' \in \tau\}$
    ovvero: $\frac{R=R' \quad (PR)=(QR)}{(PR)=(QR')} \quad (CONGR1)$;
  - $R_4 = \{(R = R', (RP) = (RQ), (RP) = (R'Q)) | P, Q, R, R' \in \tau\}$
    ovvero: $\frac{R=R' \quad (RP)=(RQ)}{(RP)=(R'Q)} \quad (CONGR2)$.

Esempio: una deduzione in $\mathcal{CL}$: dimostriamo che $\vdash_{\mathcal{CL}} (((sk)k)k) = k$:

1. $(((sk)k)k) = ((kk)(kk))$ — Axs
2. $((kk)(kk)) = k$ — Axk con $P \equiv k$ e $Q \equiv (kk)$
3. k — $TRANS(1, 2)$.

Osservazione: si sarebbe potuto mostrare, più genericamente, che per ogni $M \in \tau$ si ha: $\vdash_{\mathcal{CL}} (((sk)k)M) = M$.

Introduciamo la seguente definizione esplicita: $I = ((sk)k)$.

Osservazione: quindi ho appena mostrato che $\vdash_{\mathcal{CL}} (IM) = M$.

Esempio: dimostriamo che $\vdash_{\mathcal{CL}} (((sI)I)M) = (MM)$ per ogni $M \in \tau$:

1. $(((sI)I)M) = ((IM)(IM))$ — Axs
2. $(IM) = M$ — esempio precedente
3. $((IM)(IM)) = ((IM)(IM))$ — assioma di riflessività
4. $((IM)(IM)) = (M(IM))$ — $CONGR1(2, 3)$
5. $((IM)(IM)) = (MM)$ — $CONGR2(2, 4)$
6. $(((sI)I)M) = (MM)$ — $TRANS(1, 5)$.

Capitolo 3

Il calcolo proposizionale

3.1 Il sistema formale $\mathcal{P}_0$

Chiamiamo **proposizioni** delle espressioni elementari suscettibili di possedere un valore di verità; chiamiamo invece variabili proposizionali delle variabili che stanno per proposizioni: di solito le indicheremo con $p, q, r, \ldots$. Un assegnamento proposizionale è una funzione che associa ad ogni variabile proposizionale un valore di verità $(0, 1)$; chiameremo **tautologia** una fbf il cui valore di verità, calcolato secondo le opportune regole per i connettivi in essa presenti, è sempre 1, indipendentemente dall'assegnamento proposizionale scelto.

Il calcolo proposizionale è un sistema formale i cui teoremi sono tutte e sole le tautologie.

Definizione 3.1 *Il sistema formale $\mathcal{P}_0$ (calcolo proposizionale) è il seguente sistema formale:*

- *S: è formato dall'unione fra un insieme numerabile di variabili proposizionali: $p, q, r, s, \ldots$, l'insieme dei connettivi $\rightarrow$ e $\neg$ (implica e not) e l'insieme dei due simboli ausiliari (e);*
- *W: l'insieme delle fbf è così definito:*
  1. *ogni variabile proposizionale è una fbf;*
  2. *se α e β sono fbf allora lo sono anche $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\neg\alpha)$;*
  3. *nient'altro è una fbf.*

  Introduciamo le seguenti definizioni esplicite: $\alpha \vee \beta \equiv ((\neg\alpha) \rightarrow \beta)$, $\alpha \wedge \beta \equiv \neg((\neg\alpha) \vee (\neg\beta))$ e $\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.

  Esiste una convenzione di precedenza fra i connettivi: $\neg, (\wedge, \vee), \rightarrow$. Quindi $\alpha \wedge \beta \rightarrow \neg\alpha \equiv ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha))$.
- *Ax:*
  - $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ $\quad (Ak)$
  - $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ $\quad (AS)$
  - $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ $\quad (A\neg)$
- *$\mathcal{R} = \{MP\}$ dove MP (modus ponens) è la regola: $\frac{\alpha \quad \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$.*

Il nostro scopo sarà adesso quello di studiare $Con_{\mathcal{P}_0}(\emptyset)$ cioè l'insieme dei teoremi del calcolo proposizionale (a volte detto anch'esso $\mathcal{P}_0$).

Proposizione 3.1 $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \alpha$.
Dimostrazione:

1. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ — AS
2. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ — Ak con $\beta \equiv \alpha \to \alpha$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ — $MP(1,2)$
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ — Ak con $\beta \equiv \alpha$
5. $\alpha \to \alpha$ — $MP(3,4)$.

□

3.2 Il teorema di deduzione e le sue conseguenze

Teorema 3.1 (di deduzione, Herbrand anni '30) *Dato un insieme di fbf* Γ *in* $\mathcal{P}_0$ *si ha:*

$$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta}$$

Dimostrazione:
$(\Rightarrow)$

1. α — ipotesi

$\vdots$

k $\alpha \to \beta$ — espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta$

k+1 β — $MP(1,k)$

Quindi $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$.
$(\Leftarrow)$ Costruiamo induttivamente una derivazione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta$ a partire da una derivazione di $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$. Sia dunque $\beta_1, \ldots, \beta_n \equiv \beta$ la derivazione $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$.

base: $n = 1$: la derivazione si riduce a: β; quindi:

- β è un assioma o un'ipotesi in Γ:
  1. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ — Ak
  2. β — ipotesi o assioma
  3. $\alpha \to \beta$ — $MP(1,2)$.
- $\beta \equiv \alpha$: sappiamo dalla proposizione 3.1 che $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \alpha$, il che implica la tesi.

ind.: Supponiamo di saper scrivere una derivazione della forma $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha' \to \beta'$ a partire da una derivazione $\Gamma, \alpha' \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta'$ di lunghezza minore o uguale ad $n-1$ e sia $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$ di lunghezza $n, n > 1$; se β_n è un assioma, una ipotesi in Γ oppure α la tesi segue come nel caso base. Se invece β_n è ottenuto per modus ponens da β_i e β_j, $i, j < n$, si noti che per ipotesi induttiva so costruire le derivazioni $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta_i$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta_j$; poiché β_n è ottenuta per modus ponens da β_i e β_j, β_i avrà la forma: $\beta_i \equiv \beta_j \to \beta_n$. Costruisco allora una derivazione $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta \equiv \alpha \to \beta_n$:

1. $(\alpha \to (\beta_j \to \beta_n)) \to ((\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n))$ — AS

$\vdots$

k	$\alpha \to (\beta_j \to \beta_n)$	espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta_i$
$k+1$	$(\alpha \to \beta_j) \to (\alpha \to \beta_n)$	$MP(1,k)$
$\vdots$		
h	$\alpha \to \beta_j$	espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta_j$
$h+1$	$\alpha \to \beta_n \equiv \alpha \to \beta$	$MP(k+1,h)$

□

Proposizione 3.2 $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta riuscire a mostrare che $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$:

1. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ — Ak
2. α — ipotesi
3. $\neg\beta \to \alpha$ — $MP(1,2)$
4. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ — Ak
5. $\neg\alpha$ — ipotesi
6. $\neg\beta \to \neg\alpha$ — $MP(4,5)$
7. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ — $A\neg$
8. $(\neg\beta \to \alpha) \to \beta$ — $MP(6,7)$
9. β — $MP(3,8)$

□

Proposizione 3.3 (transitività di $\to$) $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \gamma$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta riuscire a mostrare che $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \gamma$:

1. $\alpha \to \beta$ — ipotesi
2. α — ipotesi
3. β — $MP(1,2)$
4. $\beta \to \gamma$ — ipotesi
5. γ — $MP(3,4)$

□

Esercizio 3.1 *Dimostrare la precedente proposizione senza usare il teorema di deduzione (basta rieseguire i passi di tale teorema).*

Proposizione 3.4 $\neg\alpha \to \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$.
Dimostrazione:

1. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ — $A\neg$
2. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ — proposizione 3.1
3. $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$ — $MP(1,2)$

4. $\neg\alpha \to \alpha$ ipotesi

5. α $MP(3,4)$

□

Proposizione 3.5 $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \gamma$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta riuscire a mostrare che $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \gamma$:

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ ipotesi

2. α ipotesi

3. $\beta \to \gamma$ $MP(1,2)$

4. β ipotesi

5. γ $MP(3,4)$

□

Proposizione 3.6 $\neg\neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$.
Dimostrazione:

1. $\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ Ak

2. $\neg\neg\alpha$ ipotesi

3. $\neg\alpha \to \neg\neg\alpha$ $MP(1,2)$

4. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha)$ $A\neg$

5. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha$ $MP(3,4)$

6. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ proposizione 3.1

7. α $MP(5,6)$

□

Proposizione 3.7 $\neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta riuscire a mostrare che $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$, e questo è già stato mostrato (proposizione 3.2). □

Proposizione 3.8 $\vdash_{\mathcal{P}_0} \delta \to \neg\neg\delta$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta riuscire a mostrare che $\delta \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\neg\delta$:

1. $\delta \to (\neg\neg\neg\delta \to \delta)$ Ak

2. $(\neg\neg\neg\delta \to \neg\delta) \to ((\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta)$ $A\neg$

3. $\neg\neg(\neg\delta) \to \neg\delta$ proposizione 3.6

4. $(\neg\neg\neg\delta \to \delta) \to \neg\neg\delta$ $MP(2,3)$

5. δ ipotesi

6. $\neg\neg\neg\delta \to \delta$ $MP(1,5)$

7. $\neg\neg\delta$ $MP(4,6)$

□

Proposizione 3.9 $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.
Dimostrazione: per il teorema di deduzione basta mostrare che $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta, \neg\beta \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$:

1. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta) \to ((\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha)$ — $A\neg$
2. $\neg\beta \to \neg\neg\neg\beta$ — proposizione 3.8
3. $\neg\beta$ — ipotesi
4. $\neg\neg\neg\beta$ — $MP(2,3)$
5. $\neg\neg\neg\beta \to (\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta)$ — Ak
6. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\neg\beta$ — $MP(4,5)$
7. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to \neg\alpha$ — $MP(1,6)$
8. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ — ipotesi
9. $\neg\alpha$ — $MP(7,8)$

□

Proposizione 3.10 $\alpha \to \beta \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\beta \to \neg\alpha$.
Dimostrazione:

1. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ — proposizione 3.6
2. $\alpha \to \beta$ — ipotesi
3. $\neg\neg\alpha \to \beta$ — (proposizione 3.3) $TRANS(1,2)$
4. $\beta \to \neg\neg\beta$ — proposizione 3.8
5. $\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta$ — $TRANS(3,4)$
6. $(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ — proposizione 3.9
7. $\neg\beta \to \neg\alpha$ — $MP(5,6)$

□

Proposizione 3.11 $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$.
Dimostrazione:

1. $(\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha)$ — proposizione 3.10
2. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$ — proposizione 3.7
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\neg\alpha$ — $MP(1,2)$
4. $\neg(\alpha \to \beta)$ — ipotesi
5. $\neg\neg\alpha$ — $MP(3,4)$
6. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ — proposizione 3.6
7. α — $MP(5,6)$

□

Proposizione 3.12 $\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\beta$.
Dimostrazione:

1. $(\beta \to (\alpha \to \beta)) \to (\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta)$ — proposizione 3.10
2. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ — Ak
3. $\neg(\alpha \to \beta) \to \neg\beta$ — $MP(1,2)$
4. $\neg(\alpha \to \beta)$ — ipotesi
5. $\neg\beta$ — $MP(3,4)$

□

Teorema 3.2 *Un insieme Γ di fbf di $\mathcal{P}_0$ è contraddittorio (cioè, equivalentemente, $Con_{\mathcal{P}_0}(\Gamma) = W$) se e solo se esiste una fbf α tale che $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$.*
Dimostrazione:
($\Rightarrow$) Ovvio: $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$ per ogni $\beta \in W$.
($\Leftarrow$) Per la proposizione 3.2 sappiamo che $\alpha, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$ per ogni β. Da $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$ e dalla proposizione 2.3 concludiamo quindi che $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$ per ogni β. □

Corollario 3.1 *$\mathcal{P}_0$ è inconsistente se e solo se esiste una fbf α di $\mathcal{P}_0$ tale che $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$.*
Dimostrazione: porre $\Gamma = \emptyset$ nel precedente teorema. □

Teorema 3.3 *Sia Γ un insieme consistente di fbf di $\mathcal{P}_0$ e sia quindi α tale che $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$. $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente.*
Dimostrazione: se per assurdo $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ fosse inconsistente, si avrebbe $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$; per il teorema di deduzione si avrebbe quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha \to \alpha$. Sappiamo però che $\neg\alpha \to \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ (proposizione 3.4) e per la transitività di $\vdash_{\mathcal{P}_0}$ (proposizione 2.3) avrei allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$, il che è assurdo. □

Corollario 3.2 *Se $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è contraddittorio allora $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$.*
Dimostrazione: se Γ è inconsistente è ovvio; sia allora Γ consistente; se per assurdo fosse $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$, per il teorema precedente $\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\}$ sarebbe consistente; ma per la proposizione 3.8 ogni derivazione $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathcal{P}_0} \delta$ può essere trasformata in una derivazione $\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\} \vdash_{\mathcal{P}_0} \delta$; quindi anche $\Gamma \cup \{\neg\neg\alpha\}$ sarebbe contraddittorio, il che è assurdo. □

3.3 Semantica di $\mathcal{P}_0$

Definizione 3.2 *Un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ è una funzione $\mathcal{B}$:* `variabili proposizionali`$\to \{0,1\}$.

Definizione 3.3 *Un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ è esteso per induzione ad una valutazione $\overline{\mathcal{B}}$ del linguaggio di $\mathcal{P}_0$ nel modo seguente:*

- $\overline{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{B}(p)$ *per ogni variabile proposizionale p;*
- $\overline{\mathcal{B}}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \textit{se e solo se} \quad \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1 \quad \textit{e} \quad \overline{\mathcal{B}}(\beta) = 0; \\ 1 & \textit{altrimenti;} \end{cases}$
- $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1 - \overline{\mathcal{B}}(\alpha)$.

Definizione 3.4 *Una fbf α di $\mathcal{P}_0$ è detta essere:*

- *una tautologia se e solo se per ogni assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ si ha $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$;*
- *(proposizionalmente) soddisfacibile se e solo se esiste un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ tale che $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$;*
- *contraddittoria se e solo se non è soddisfacibile.*

Un insieme di fbf Γ di $\mathcal{P}_0$ è detto soddisfacibile se e solo se esiste un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ tale che $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1$ per ogni $\beta \in \Gamma$.

Proposizione 3.13 *Una fbf α di $\mathcal{P}_0$ è un tautologia se e solo se $\neg\alpha$ è contraddittoria.*
Dimostrazione: direttamente dalla definizione di $\overline{\mathcal{B}}$ per il connettivo $\neg$ $\square$

Proposizione 3.14 *Se α e $\alpha \to \beta$ sono tautologie, anche β è una tautologia.*
Dimostrazione: ovvio dalla definizione di $\overline{\mathcal{B}}$ $\square$

Lemma 3.1 *Data una fbf α di $\mathcal{P}_0$, $\overline{\mathcal{B}}(\alpha)$ dipende solo dal valore assegnato da $\mathcal{B}$ alle variabili proposizionali presenti in α.*
Dimostrazione: ovvio dalla definizione di $\overline{\mathcal{B}}$ $\square$

Teorema 3.4 *Data una fbf α di $\mathcal{P}_0$, è decidibile se α è una tautologia.*
Dimostrazione: basta costruire la tabella di verità per α, che avrà un numero di colonne finito grazie al lemma precedente, e quindi controllare se per ogni riga si ha $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$. $\square$

Definizione 3.5 (conseguenza tautologica) *Data una fbf α di $\mathcal{P}_0$ e un insieme Γ di fbf di $\mathcal{P}_0$, si dice che α è conseguenza tautologica di Γ se e solo se per ogni assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ si ha che: se per ogni fbf $\beta \in \Gamma$ vale $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1$ allora $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$. Scriveremo allora: $\Gamma \models \alpha$.*

3.4 Correttezza e completezza di $\mathcal{P}_0$

Teorema 3.5 (di correttezza o di validità o di soundness) *Siano Γ un insieme di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf in $\mathcal{P}_0$; si ha che:*

$$\boxed{\text{se } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \text{ allora } \Gamma \models \alpha}$$

Dimostrazione: per induzione sulla lunghezza della derivazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ con $\alpha_n \equiv \alpha$:

base: $n = 1$: α può essere:

- un assioma: tutti gli assiomi di $\mathcal{P}_0$ sono tautologie, e quindi $\Gamma \models \alpha$; proviamo a dimostrarlo per l'assioma AS, cioè per la fbf: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$:

α	β	γ	$\beta \to \gamma$	$\alpha \to (\beta \to \gamma)$	$(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$	AS
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

– un'ipotesi in Γ: si avrà ovviamente $\Gamma \models \alpha$;

ind.: $n > 1$; se α è un assioma o un'ipotesi in Γ la tesi segue come nel caso base; se invece è ottenuto per modus ponens da α_i e α_j, con $i, j < n$, α_j avrà la forma: $\alpha_j \equiv \alpha_i \to \alpha_n$ e inoltre, per ipotesi induttiva: $\Gamma \models \alpha_i$ e $\Gamma \models \alpha_j$; se per assurdo non fosse $\Gamma \models \alpha$, esisterebbe un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ che soddisfa Γ ma non α; ma per l'ipotesi induttiva $\mathcal{B}$ soddisfa α_i e α_j e quindi, per la definizione di $\overline{\mathcal{B}}$ sul connettivo $\to$, si avrà $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$, assurdo. Quindi $\Gamma \models \alpha$.

□

Corollario 3.3 *$\mathcal{P}_0$ è consistente.*
Dimostrazione: se fosse inconsistente, per il corollario 3.1 esisterebbe α tale che $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$; per il teorema di correttezza α e $\neg\alpha$ sarebbero tautologie, assurdo per la definizione di assegnamento proposizionale sul connettivo $\neg$. □

Proposizione 3.15 *Sia Γ un insieme di fbf di $\mathcal{P}_0$; se Γ è soddisfacibile allora Γ è consistente.*
Dimostrazione: sappiamo che esiste un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ che soddisfa Γ; se per assurdo Γ fosse inconsistente, esisterebbe una fbf α tale che $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$; per il teorema di correttezza si dovrebbe quindi avere: $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$ e $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1$, il che è assurdo per la definizione di $\overline{\mathcal{B}}$ sul connettivo $\neg$. □

Definizione 3.6 *Un insieme di fbf Γ di $\mathcal{P}_0$ è consistente massimale se e solo se:*

- *è consistente;*
- *se $\Gamma \subseteq \Gamma'$ e Γ' è consistente allora $\Gamma = \Gamma'$ (ovvero: $\alpha \notin \Gamma$ implica che $\Gamma \cup \{\alpha\}$ è inconsistente).*

Esempio: sia dato un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$; definiamo l'insieme: $\Gamma_{\mathcal{B}} = \{\alpha : \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1\}$; $\Gamma_{\mathcal{B}}$ è consistente massimale poiché:

- è consistente grazie alla proposizione 3.15;
- è massimale: se $\alpha \notin \Gamma_{\mathcal{B}}$ allora $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 0$, per cui $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1$ e quindi $\neg\alpha \in \Gamma_{\mathcal{B}}$; quindi $\Gamma_{\mathcal{B}}, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma_{\mathcal{B}}, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$, ovvero $\Gamma_{\mathcal{B}} \cup \{\alpha\}$ è inconsistente.

Lemma 3.2 (del completamento di Lindenbaum) *Sia dato un insieme consistente di fbf Γ di $\mathcal{P}_0$; esiste un insieme consistente massimale Γ^* tale che $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Γ^* è effettivamente calcolabile a partire da Γ.*
Dimostrazione: fissiamo un'enumerazione $\alpha_1, \dots \alpha_n, \dots$ di tutte le fbf di $\mathcal{P}_0$ (si può pensare di associare ad ogni fbf la sequenza dei codici ASCII dei suoi caratteri e poi di *normalizzare* la numerazione eliminando i *buchi*; il processo è chiaramente effettivo).

Poniamo:

- $\Gamma_0 = \Gamma$;
- $\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} & \text{se} \quad \Gamma_n \cup \{\alpha_n\} \quad \text{è consistente;} \\ \Gamma_n & \text{altrimenti;} \end{cases}$
- $\Gamma^* = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma_n$.

Si noti che la definizione di Γ_n è effettiva poiché è decidibile il problema di dire se un insieme di fbf di $\mathcal{P}_0$ è consistente [1].

Si osservi adesso che:

[1] Questo sarà ovvio dopo la dimostrazione del lemma di soddisfacibilità, per la quale non serve l'effettività del calcolo di Γ^* (non c'è quindi un circolo vizioso).

1. $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ per ogni n (ovvio);

2. Γ_n è consistente per ogni n (ovvio per induzione su n);

3. Γ^* è consistente: se non lo fosse, esisterebbe α tale che $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$; tali derivazioni saranno formate da un numero finito di fbf di Γ^* (proposizione 2.2) e quindi, per il punto 1, esiste un intero m tale che $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma_m \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$, ovvero Γ_m è inconsistente, assurdo per il punto 2;

4. Γ^* è massimale: sia $\alpha \notin \Gamma^*$; α esiste certamente poiché Γ^* è consistente; sarà $\alpha \equiv \alpha_k$ per un certo k; inoltre si sarà operato al passo k in modo tale che $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k$ altrimenti, se $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup \{\alpha_k\}$, si avrebbe $\alpha_k \in \Gamma^*$, il che è contro la nostra ipotesi iniziale; quindi $\Gamma_k \cup \{\alpha_k\}$ è inconsistente e, per il punto 1, anche $\Gamma^* \cup \{\alpha\}$ lo è. Questo prova che Γ^* è massimale.

□

Osservazione: Il precedente lemma, pur di modificare la dimostrazione del punto 3, è valido anche per generici sistemi formali e, cambiando totalmente la dimostrazione, anche per linguaggi transfiniti (cioè con W di cardinalità non numerabile).

Proposizione 3.16 *Un insieme consistente massimale Γ di fbf di $\mathcal{P}_0$ gode delle seguenti proprietà:*

i. Γ è una teoria;

ii. per ogni fbf α di $\mathcal{P}_0$, $\alpha \in \Gamma$ se e solo se $\neg\alpha \notin \Gamma$;

iii. per ogni coppia di fbf di $\mathcal{P}_0$ α e β, $\alpha \to \beta \in \Gamma$ se e solo se da $\alpha \in \Gamma$ segue $\beta \in \Gamma$.

Dimostrazione:

i. Basta mostrare che $\alpha \in \Gamma$ se e solo se $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$:

($\Rightarrow$) Ovvio.

($\Leftarrow$) Se per assurdo $\alpha \notin \Gamma$, $\Gamma \cup \{\alpha\}$ sarebbe inconsistente poiché Γ è massimale; per il corollario 3.2 avrei $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$, assurdo poiché per ipotesi $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e per la consistenza di Γ.

ii. ($\Rightarrow$) Se fosse $\alpha \in \Gamma$ e $\neg\alpha \in \Gamma$ allora Γ sarebbe inconsistente, il che è assurdo.

($\Leftarrow$) Se per assurdo $\neg\alpha \notin \Gamma$ e $\alpha \notin \Gamma$, per la massimalità di Γ gli insiemi $\Gamma \cup \{\alpha\}$ e $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ sarebbero inconsistenti; quindi $\Gamma, \neg\alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$; per la proposizione 3.4 e per modus ponens avrei $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\alpha$, assurdo poiché Γ è consistente.

iii. ($\Rightarrow$) Da $\alpha \to \beta \in \Gamma$ e $\alpha \in \Gamma$ segue che $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \to \beta$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$; per modus ponens, quindi, $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \beta$ e quindi, per il punto i, $\beta \in \Gamma$.

($\Leftarrow$) Se per assurdo si avesse che da $\alpha \in \Gamma$ segue $\beta \in \Gamma$ per α e β tali che $\alpha \to \beta \notin \Gamma$, per il punto ii si avrebbe che $\neg(\alpha \to \beta) \in \Gamma$; per le proposizioni 3.11 e 3.12 e per modus ponens si avrebbe $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg\beta$ e, per il punto i, $\alpha \in \Gamma$ e $\neg\beta \in \Gamma$; ma per ipotesi da $\alpha \in \Gamma$ segue $\beta \in \Gamma$ e quindi, per il punto ii, $\neg\beta \notin \Gamma$, assurdo.

□

Lemma 3.3 (di soddisfacibilità) *Dato un insieme Γ di fbf in $\mathcal{P}_0$, se Γ è consistente allora Γ è soddisfacibile.*
Dimostrazione: dato Γ esiste, per il lemma di Lindenbaum, un insieme Γ^* di fbf di $\mathcal{P}_0$ consistente e massimale tale che $\Gamma \subseteq \Gamma^*$; definiamo $\mathcal{B}(p) = 1$ per tutti e soli i simboli proposizionali $p \in \Gamma^*$; dimostriamo che $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1$ se e solo se $\beta \in \Gamma^*$; questo implicherà la tesi:

- $\beta \equiv p$ con p simbolo proposizionale: per definizione si avrà: $\overline{\mathcal{B}}(p) = \mathcal{B}(p) = 1$;
- $\beta \equiv \neg\alpha$: $\beta \in \Gamma^*$ se e solo se $\neg\alpha \in \Gamma^*$ se e solo se (punto ii della precedente proposizione) $\alpha \notin \Gamma^*$ se e solo se (ipotesi induttiva, poiché α è più semplice di β) $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 0$; quindi $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1 - \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$;
- $\beta \equiv \alpha \to \gamma$: $\beta \in \Gamma^*$ se e solo se $\alpha \to \gamma \in \Gamma^*$ se e solo se (per il punto iii della precedente proposizione) da $\alpha \in \Gamma^*$ segue $\gamma \in \Gamma^*$, se e solo se (ipotesi induttiva, poiché α e γ sono più semplici di β) da $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$ segue $\overline{\mathcal{B}}(\gamma) = 1$, se e solo se $\overline{\mathcal{B}}(\alpha \to \gamma) = 1$.

□

Teorema 3.6 (di completezza) *Sia Γ un insieme di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$; si ha che:*

$$\boxed{\textit{da } \Gamma \models \alpha \textit{ segue } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha}$$

Dimostrazione: per contrapposizione, dimostriamo che $\Gamma \nvdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ implica $\Gamma \not\models \alpha$. Se infatti $\Gamma \nvdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$, $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente (teorema 3.3); per il lemma di soddisfacibilità, quindi, esiste un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ per il quale $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma \cup \{\neg\alpha\}) = 1$, ovvero $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma) = 1$ e $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 0$; ne segue che $\Gamma \not\models \alpha$. □

Corollario 3.4 *Sia Γ un insieme di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$; si ha che:*

$$\boxed{\Gamma \models \alpha \textit{ se e solo se } \Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha}$$

Dimostrazione: dai teoremi di correttezza e completezza. □

Corollario 3.5 *Data una fbf α di $\mathcal{P}_0$, è decidibile il problema di dire se α è un teorema di $\mathcal{P}_0$ (problema della decisione o Entscheidungsproblem).*
Dimostrazione: grazie al precedente corollario, infatti, è riconducibile al problema di dire se α è una tautologia, che è a sua volta decidibile (teorema 3.4). □

3.5 I tableaux proposizionali

Studiamo adesso un sistema formale che permette di semplificare le derivazioni di $\mathcal{P}_0$; come si sarà notato, infatti, tali derivazioni sono in genere lontane dal naturale meccanismo mentale degli esseri umani, in quanto vanno costruite a partire da un insieme minimo di assiomi e proseguendo in maniera poco prevedibile da un occhio inesperto. Con i tableaux proposizionali avremo invece un sistema formale le cui derivazioni seguono lo schema mentale degli esseri umani, e la cui espressività è dimostrabilmente equivalente a quella del calcolo proposizionale, se ci limitiamo ad insiemi finiti di fbf di $\mathcal{P}_0$.

Non definiremo i tableaux proposizionali come un vero e proprio sistema formale, in quanto le sue derivazioni possono essere meglio comprese se espresse con un formalismo bidimensionale piuttosto che lineare; deve esser chiaro, però, che la definizione poteva essere data in maniera più aderente a quella di sistema formale, e con poche modifiche rispetto a quella che daremo sotto.

Definizione 3.7 *Un tableau è un albero orientato, finito e con nodi etichettati; le etichette sono insiemi finiti di fbf di $\mathcal{P}_0$; le foglie sono dette nodi terminali; un ramo è un cammino radice–foglia.*

Definizione 3.8 *Un tableau proposizionale è un tableau costruito tramite le seguenti regole:*

- *base: se Γ è un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ allora un nodo etichettato con Γ è un tableau proposizionale;*
- *$\rightarrow$: dato un tableau proposizionale e un suo nodo terminale n, se nel ramo cui appartiene tale nodo compare una fbf del tipo $\alpha \rightarrow \beta$, allora è un tableau proposizionale anche il tableau ottenuto aggiungendo al nodo n due figli etichettati con $\neg\alpha$ e β:*

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \vdots & \\
 & \alpha \rightarrow \beta & \\
 & \vdots & \\
 & n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\neg\alpha & & \beta
\end{tikzcd}
$$

- *$\neg\rightarrow$: dato un tableau proposizionale e un suo nodo terminale n, se nel ramo cui appartiene tale nodo compare una fbf del tipo $\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, allora è un tableau proposizionale anche il tableau ottenuto aggiungendo al nodo n un figlio etichettato con $\alpha, \neg\beta$:*

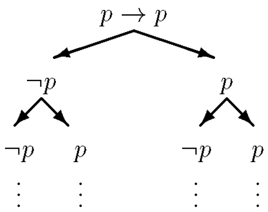
$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\vdots \\
\neg(\alpha \rightarrow \beta) \\
\vdots \\
n \arrow[d] \\
\alpha, \neg\beta
\end{tikzcd}
$$

- *$\neg\neg$: dato un tableau proposizionale e un suo nodo terminale n, se nel ramo cui appartiene tale nodo compare una fbf del tipo $\neg\neg\alpha$, allora è un tableau proposizionale anche il tableau ottenuto aggiungendo al nodo n un figlio etichettato con α:*

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small]
\vdots \\
\neg\neg\alpha \\
\vdots \\
n \arrow[d] \\
\alpha.
\end{tikzcd}
$$

Un tableau proposizionale è detto essere un tableau proposizionale per Γ se e solo se Γ è l'etichetta della sua radice.

Osservazione: già dalla definizione è evidente come i tableaux proposizionali permettano derivazioni *goal directed*, a differenza di $\mathcal{P}_0$; inoltre, se utilizzo una solo volta ogni fbf, ho un numero finito di regole applicabili ad ogni passo.
Esempio: un tableau proposizionale per $p \rightarrow p$:



da qui potrei proseguire ad libitum.

Definizione 3.9 *In un tableau proposizionale un ramo è detto chiuso se e solo se fra le sue etichette compaiono p e $\neg p$ per qualche variabile proposizionale p; diremo allora che p e $\neg p$ sono usate per chiudere tale ramo; indicheremo un ramo chiuso con il simbolo $\odot$ posto sotto la sua foglia. Un tableau proposizionale è detto chiuso, ovvero è detto essere una confutazione, se e solo se tutti i suoi rami sono chiusi.*

Definizione 3.10 *Un insieme di fbf Γ di $\mathcal{P}_0$ è detto confutabile se e solo se esiste un tableau proposizionale chiuso la cui radice è marcata con Γ.*

Notazione: quando usiamo una fbf in un ramo di un tableau proposizionale (cioè la usiamo secondo le regole precedentemente elencate per giustificare la costruzione induttiva dell'albero), marcheremo tale fbf con il simbolo $\surd$.
Osservazione: quando si usa una fbf è bene usarla ovunque serva e non usarla più (è un criterio per mantenere ordinate le derivazioni fatte tramite i tableaux proposizionali).

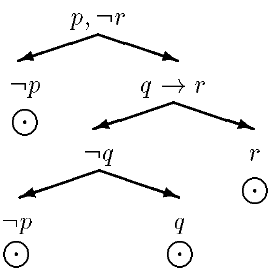
Proposizione 3.17 $\neg Ak$*, istanziato con variabili proposizionali, è confutabile.*
Dimostrazione:

$$\begin{array}{c} \neg(p \to (q \to p))\surd \\ p, \neg(q \to p)\surd \\ q, \neg p \\ \odot \end{array}$$

□

Proposizione 3.18 $\neg AS$*, istanziato con variabili proposizionali, è confutabile.*
Dimostrazione:

$$\begin{array}{c} \neg((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))\surd \\ p \to (q \to r)\surd, \neg((p \to q) \to (p \to r))\surd \\ p \to q\surd, \neg(p \to r)\surd \end{array}$$



□

Proposizione 3.19 $\neg A\neg$*, istanziato con variabili proposizionali, è confutabile.*
Dimostrazione:

$$\begin{array}{c}
\neg((\neg p \to q) \to ((\neg p \to \neg q) \to p))\surd \\
\neg p \to q\surd, \neg((\neg p \to \neg q) \to p)\surd \\
\neg p \to \neg q, \neg p \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{c} \neg\neg p \\ p \\ \odot \end{array} \qquad \begin{array}{c} q \\ \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{cc} \neg\neg p & \neg q \\ \odot & \odot \end{array} \end{array}
\end{array}$$

Lemma 3.4 *Se un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ soddisfa tutte le fbf di un ramo di un tableau proposizionale allora $\mathcal{B}$ soddisfa tutte le fbf:*

1. *del nuovo ramo ottenuto dal precedente con l'applicazione di una delle regole $\neg\neg$ e $\neg \to$;*
2. *di almeno uno dei due rami ottenuti dal precedente con l'applicazione della regola $\to$.*

Dimostrazione:

1. Per la regola $\neg\neg$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg\alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{array}$$

so che $1 = \overline{\mathcal{B}}(\neg\neg\alpha) = 1 - \overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1 - 1 + \overline{\mathcal{B}}(\alpha)$, quindi deve essere $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$.
Per la regola $\neg \to$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \to \beta) \\ \vdots \\ \alpha, \neg\beta \end{array}$$

so che $1 = \overline{\mathcal{B}}(\neg(\alpha \to \beta)) = 1 - \overline{\mathcal{B}}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1 \\ & \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{B}}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

quindi deve essere $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1$ e $\overline{\mathcal{B}}(\neg\beta) = 1$.

2. Riscriviamo la regola $\to$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \to \beta \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \neg\alpha \qquad\qquad \beta \end{array}$$

so che $1 = \overline{\mathcal{B}}(\alpha \to \beta) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 1 \quad \text{e} \quad \overline{\mathcal{B}}(\beta) = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

quindi $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 0$ oppure $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1$, cioè $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1$ ovvero $\overline{\mathcal{B}}(\beta) = 1$.

$\square$

Lemma 3.5 *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$; se Γ è confutabile allora non è soddisfacibile.*

Dimostrazione: sia dato un tableau proposizionale di confutazione per Γ; se per assurdo Γ fosse soddisfacibile, per il lemma precedente esisterebbe un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ che rende vere tutte le fbf di un ramo di tale tableau; ma poiché il tableau è di confutazione, in ogni ramo è presente p e $\neg p$ per un'opportuna variabile proposizionale p; quindi si dovrebbe avere: $1 = \overline{\mathcal{B}}(p) = \overline{\mathcal{B}}(\neg p)$, il che è assurdo. $\square$

Teorema 3.7 *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$; se $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ è confutabile allora $\Gamma \models \alpha$.*

Dimostrazione: per contrapposizione basta mostrare che se $\Gamma \not\models \alpha$ allora $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ non è confutabile; a tal fine, grazie al lemma precedente, per contrapposizione, basta mostrare che se $\Gamma \not\models \alpha$ allora $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ è soddisfacibile. Quest'ultima implicazione è chiaramente vera: se $\Gamma \not\models \alpha$ allora esiste un assegnamento proposizionale $\mathcal{B}$ tale che $\overline{\mathcal{B}}(\Gamma) = 1$ ma $\overline{\mathcal{B}}(\alpha) = 0$, ovvero $\overline{\mathcal{B}}(\neg\alpha) = 1$; quindi $\overline{\mathcal{B}}(\{\Gamma, \neg\alpha\}) = 1$, ovvero $\{\Gamma, \neg\alpha\}$ è soddisfacibile. $\square$

Definizione 3.11 *Possiamo introdurre le seguenti regole derivate:*

- $\vee$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \vee \beta \\ \vdots \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \alpha \qquad\qquad \beta \end{array} \qquad \textit{poiché:} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \vee \beta \equiv \neg\alpha \to \beta \\ \vdots \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{c}\neg\neg\alpha \\ \alpha\end{array} \qquad\qquad \beta \end{array}$$

- $\neg\vee$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg(\neg\alpha \to \beta)) \\ \vdots \\ \neg\alpha, \neg\beta \end{array}$$

- $\wedge$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \wedge \beta \\ \vdots \\ \alpha, \beta \end{array} \qquad \textit{poiché:} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \wedge \beta \equiv \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \vdots \\ \neg\neg\alpha, \neg\neg\beta \\ \alpha \\ \beta \end{array}$$

- $\neg\wedge$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \wedge \beta) \\ \vdots \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \neg\alpha \qquad\qquad \neg\beta \end{array} \qquad \textit{poiché:} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \\ \vdots \\ \neg\alpha \vee \neg\beta \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \neg\alpha \qquad\qquad \neg\beta \end{array}$$

Esempio: una derivazione tramite queste regole derivate:

$$\begin{array}{c}
\neg((\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma))\surd \\
\alpha \to (\beta \vee \gamma)\surd, \neg((\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma))\surd \\
\neg(\alpha \to \beta)\surd, \neg(\alpha \to \gamma) \\
\alpha, \neg\beta \\
\alpha, \neg\gamma \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\neg\alpha & \beta \vee \gamma \\
\odot & \swarrow \quad \searrow \\
 & \begin{array}{cc} \beta & \gamma \\ \odot & \odot \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

Definizione 3.12 *Un ramo di un tableau proposizionale che termina con una foglia etichettata con un insieme di fbf confutabile, è detto essere come se fosse chiuso (as good as closed).*

Proposizione 3.20 *Se un ramo di un tableau proposizionale contiene, fra le etichette dei suoi nodi, α e $\neg\alpha$ per una opportuna fbf α di $\mathcal{P}_0$, quel ramo è come se fosse chiuso.*

Dimostrazione: per induzione sulla struttura di α:

- $\alpha \equiv p$, con p variabile proposizionale: il ramo è chiuso e, quindi, anche come se fosse chiuso;
- $\alpha \equiv \neg\beta$: il ramo contiene cioè $\neg\beta$ e $\neg\neg\beta$; quindi posso espanderlo, tramite la regola $\neg\neg$, in modo da ottenere β; esso contiene β e $\neg\beta$ e quindi, per ipotesi induttiva, è come se fosse chiuso;
- $\alpha \equiv \beta \to \gamma$: posso estendere facilmente il ramo:

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\beta \to \gamma \equiv \alpha \\
\vdots \\
\neg(\beta \to \gamma) \equiv \neg\alpha \\
\vdots \\
\text{(il ramo finiva qui)} \\
\beta, \neg\gamma \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc} \neg\beta & \gamma \\ \odot & \odot \end{array}
\end{array}$$

  Posso considerare il ramo chiuso poiché, per ipotesi induttiva, γ e β permettono di chiudere un ramo in cui sono presenti sia positivamente che negativamente.

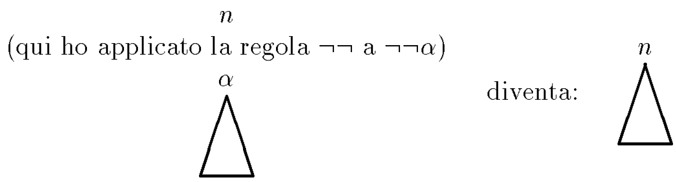
$\square$

Definizione 3.13 *Introduciamo la regola del terzo escluso (TE o EM) per i tableaux proposizionali:*

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc} \gamma & \neg\gamma \end{array}
\end{array}$$

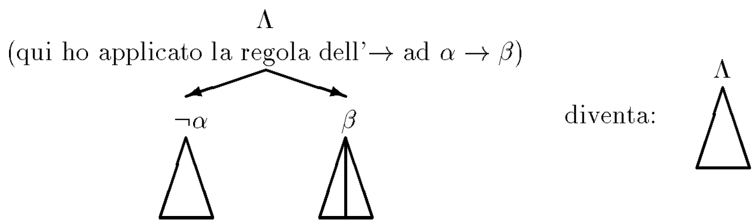
Lemma 3.6 *Siano* Γ *e* Δ *due insiemi finiti di fbf di* $\mathcal{P}_0$*; se* Γ *è confutabile anche* $\Gamma \cup \Delta$ *è confutabile.*
Dimostrazione: posso usare la stessa confutazione che ho per Γ, senza sfruttare le ipotesi aggiuntive in Δ. $\Box$

Lemma 3.7 *Sia* Γ *un insieme finito di fbf di* $\mathcal{P}_0$ *e* α *una fbf di* $\mathcal{P}_0$*; se* $\Gamma, \neg\neg\alpha$ *è confutabile anche* Γ, α *è confutabile.*
Dimostrazione: Se nella refutazione di $\Gamma, \neg\neg\alpha$ non ho utilizzato $\neg\neg\alpha$ il risultato è ovvio; altrimenti l'unico modo in cui posso avere utilizzato tale fbf è tramite la regola $\neg\neg$; ottengo una refutazione di Γ, α trasformando la refutazione di $\Gamma, \neg\neg\alpha$ nel modo seguente:

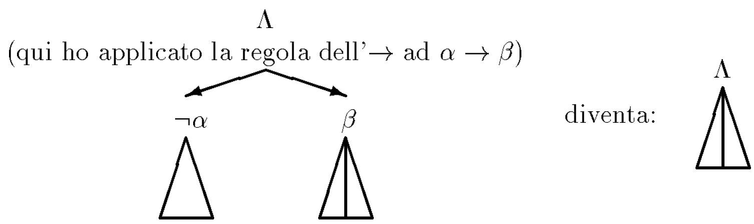


$\Box$

Lemma 3.8 *Sia* Γ *un insieme finito di fbf di* $\mathcal{P}_0$*,* α *e* β *due fbf di* $\mathcal{P}_0$*; se* $\Gamma, \alpha \to \beta$ *è confutabile anche* $\Gamma, \neg\alpha$ *e* Γ, β *sono confutabili.*
Dimostrazione: Se nella confutazione di $\Gamma, \alpha \to \beta$ non ho mai utilizzato $\alpha \to \beta$ il risultato è ovvio; altrimenti l'unica regola che posso aver applicato ad $\alpha \to \beta$ è quella dell'$\to$; ottengo una refutazione di $\Gamma, \neg\alpha$ a partire da quella di $\Gamma, \alpha \to \beta$ sostituendo l'etichetta di tale albero con $\Gamma, \neg\alpha$ ed eseguendo la seguente trasformazione:



Ottengo una refutazione di Γ, β a partire da quella di $\Gamma, \alpha \to \beta$ sostituendo l'etichetta di tale albero con Γ, β ed eseguendo la seguente trasformazione:



$\Box$

Lemma 3.9 *Sia* Γ *un insieme finito di fbf di* $\mathcal{P}_0$*,* α *e* β *fbf di* $\mathcal{P}_0$*; se* $\Gamma, \neg(\alpha \to \beta)$ *è confutabile anche* $\Gamma, \alpha, \neg\beta$ *è confutabile.*
Dimostrazione: se nella confutazione di $\Gamma, \neg(\alpha \to \beta)$ non ho mai utilizzato $\neg(\alpha \to \beta)$ il risultato è ovvio; altrimenti l'unica regola che posso aver applicato alla fbf $\neg(\alpha \to \beta)$ è quella del $\neg \to$; ottengo una refutazione di $\Gamma, \alpha, \neg\beta$ da quella di $\Gamma, \neg(\alpha \to \beta)$ sostituendo la radice di tale albero con $\Gamma, \alpha, \neg\beta$ ed effettuando la seguente trasformazione:

Λ
(qui ho applicato la regola del $\neg\to$ a $\neg(\alpha\to\beta)$)
$\alpha, \neg\beta$

diventa: Λ

$\square$

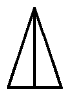
Lemma 3.10 *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ e p una variabile proposizionale; se sia Γ, p che $\Gamma, \neg p$ sono confutabili anche Γ è confutabile.*
Dimostrazione: se non usiamo p nella confutazione di Γ, p o non usiamo $\neg p$ nella confutazione di $\Gamma, \neg p$ il risultato è ovvio; supponiamo quindi di usarli entrambi; l'unica possibilità è quella di averli usati per chiudere alcuni rami; quindi nella refutazione di Γ, p ho almeno una istanza di $\neg p$ e nella refutazione di $\Gamma, \neg p$ ho almeno una istanza di p. Se dalle radici di tali refutazioni elimino p o, rispettivamente, $\neg p$, ottengo dei tableaux proposizionali non più chiusi, ma i cui unici rami aperti terminano con $\neg p$ o, rispettivamente, con p:

Γ

$\neg p \ldots \neg p$

e

Γ



$p \ldots p$

Ottengo quindi una confutazione di Γ applicando il secondo tableau alle foglie che terminano con $\neg p$ del primo. $\square$

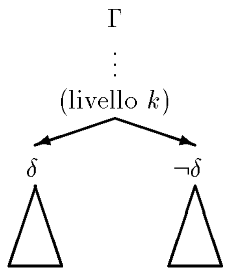
Lemma 3.11 (di eliminazione) *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$; se sia Γ, α che $\Gamma, \neg\alpha$ sono confutabili anche Γ è confutabile.*
Dimostrazione: per induzione sulla struttura di α:

- $\alpha \equiv p$ con p variabile proposizionale: direttamente dal lemma precedente;
- $\alpha \equiv \neg\beta$: so che $\Gamma, \neg\beta$ e $\Gamma, \neg\neg\beta$ sono confutabili; per il lemma 3.7 anche Γ, β è confutabile e per ipotesi induttiva Γ è confutabile;
- $\alpha \equiv \beta \to \gamma$: so che $\Gamma, \beta \to \gamma$ e $\Gamma, \neg(\beta \to \gamma)$ sono confutabili; quindi:

$$\underbrace{\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{array}{cc} \begin{array}{c}\Gamma,\beta\to\gamma \quad \text{confutabile}\\ \Downarrow\\ \text{(lemma 3.8)}\\ \Gamma,\gamma\quad\text{confutabile}\\ \Downarrow\\ \text{(lemma 3.6)}\\ \Gamma,\beta,\gamma\quad\text{confutabile}\end{array} & \begin{array}{c} \Gamma,\neg(\beta\to\gamma)\\ \text{confutabile}\\ \Downarrow\\ \text{(lemma 3.9)}\\ \Gamma,\beta,\neg\gamma\\ \text{confutabile}\end{array}\end{array}}_{\begin{array}{c}\Downarrow\\ \text{(ipotesi induttiva)}\\ \Gamma,\beta\\ \text{confutabile}\end{array}} & \begin{array}{c}\Gamma,\beta\to\gamma\\ \text{confutabile}\\ \Downarrow\\ \text{(lemma 3.8)}\\ \Gamma,\neg\beta\\ \text{confutabile}\end{array}\end{array}}_{\begin{array}{c}\Downarrow\\ \text{(ipotesi induttiva)}\\ \Gamma\text{ confutabile.}\end{array}}$$

□

Teorema 3.8 *EM è una regola ammissibile: dato un insieme finito Γ di fbf di $\mathcal{P}_0$, se esiste una refutazione di Γ che utilizza la regola EM allora esiste una refutazione di Γ che non utilizza la regola EM.*
Dimostrazione: sia data una refutazione di Γ che utilizza la regola EM; sia k il livello massimale di applicazione di tale regola:

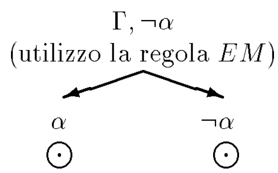


Sia Γ' l'insieme delle fbf presenti sul ramo che dalla radice arriva a questa applicazione della regola EM; per definizione di k, posso costruire una confutazione di Γ', δ e $\Gamma', \neg\delta$ senza usare la regola EM: basta etichettare i sottoalberi sopra rappresentati rispettivamente con Γ', δ e $\Gamma', \neg\delta$. Per il lemma di eliminazione, quindi, esiste un albero di refutazione di Γ' che non utilizza la regola EM; applicando tale albero nel nodo in cui si effettuava la precedente applicazione della regola EM, ottengo una nuova refutazione di Γ che utilizza un numero di volte strettamente inferiore la regola EM rispetto alla refutazione che avevamo per ipotesi; riapplico il procedimento iterativamente finché, poiché l'albero di refutazione originario di Γ è finito e contiene quindi un numero finito di applicazioni della regola EM, non otterrò una refutazione di Γ che non utilizza la regola EM. □

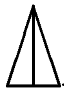
Osservazione: EM non è chiaramente una regola derivata.

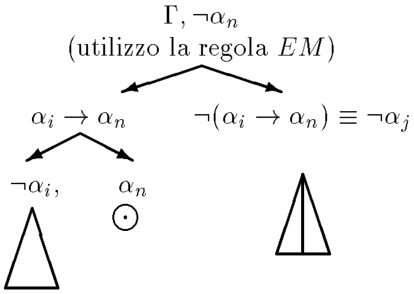
Teorema 3.9 *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$. Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$ allora $\Gamma, \neg\alpha$ è confutabile.*
Dimostrazione: per induzione sulla lunghezza della derivazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ con $\alpha_n \equiv \alpha$:

- $n = 1$: si danno due casi:
  1. α è un assioma: per le proposizioni 3.17, 3.18 e 3.19, tutti gli assiomi istanziati con variabili proposizionali sono refutabili; grazie alla proposizione 3.20 otteniamo il risultato anche se essi non sono istanziati solamente con variabili proposizionali.
  2. $\alpha \in \Gamma$: quindi $\Gamma, \neg\alpha$ contiene α e $\neg\alpha$ ed è facilmente confutabile tramite la regola EM:

     Per il teorema 3.8, $\Gamma, \neg\alpha$ è confutabile anche senza utilizzare la regola EM.
- $n > 1$: se α_n è un assioma o un'ipotesi in Γ la dimostrazione prosegue come nel caso base; altrimenti α_n è ottenuta per modus ponens da α_i e α_j, $i, j < n$:

$\frac{\alpha_i \to \alpha_n \equiv \alpha_j \quad \alpha_i}{\alpha_n}$. Per ipotesi induttiva $\Gamma, \neg\alpha_i$ e $\Gamma, \neg\alpha_j$ sono confutabili; indico tali alberi di refutazione rispettivamente con  e . Costruisco quindi una refutazione di $\Gamma, \neg\alpha_n$ che utilizza la regola EM:



Per il teorema 3.8 so che esiste una confutazione di $\Gamma, \neg\alpha_n$ che non usa la regola EM, e quindi il teorema è dimostrato.

□

Corollario 3.6 *Sia Γ un insieme finito di fbf di $\mathcal{P}_0$ e α una fbf di $\mathcal{P}_0$; si ha che:*

$$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha \textit{ se e solo se } \Gamma \models \alpha \textit{ se e solo se } \Gamma, \neg\alpha \textit{ è confutabile}}$$

Dimostrazione: direttamente dalla correttezza e completezza di $\mathcal{P}_0$ e dai teoremi 3.7 e 3.9. □

Proposizione 3.21 *Siano α e β due fbf di $\mathcal{P}_0$; si ha: $\alpha, \neg\beta \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg(\alpha \to \beta)$.*
Dimostrazione: Grazie al corollario precedente, basta mostrare che $\alpha, \neg\beta, \neg\neg(\alpha \to \beta)$ è confutabile:

$$\begin{array}{c} \alpha, \neg\beta, \neg\neg(\alpha \to \beta) \\ \alpha \to \beta \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \neg\alpha \qquad\qquad \beta \\ \odot \qquad\qquad \odot \end{array}$$

□

Capitolo 4

Il calcolo dei predicati

Nel calcolo proposizionale non siamo capaci di esprimere una relazione fra più proposizioni: se voglio dire che il *successore* di un *numero pari* è un *numero dispari* posso al più scrivere: $pari\_x \to dispari\_x + 1$, ma siamo ben lontani da quel che vorremmo esprimere; inoltre non posso indicare esistenza o universalità; è ben giustificata, quindi, la richiesta di studiare un nuovo sistema formale, che sia un calcolo più *potente* di $\mathcal{P}_0$; questo calcolo sarà il calcolo dei predicati.

4.1 Il linguaggio dei predicati

Definizione 4.1 *Una segnatura è una coppia formata da un insieme di simboli di funzione e un insieme di simboli di predicato.*

Notazione: aggiungiamo un esponente intero ad ogni simbolo di funzione o di predicato quando vogliamo specificarne l'arità; qualora essa risulti chiara dal contesto eviteremo tale appesantimento sintattico.
Esempio: $\Sigma_{\mathcal{PO}} = \{\emptyset, \{<^2\}\}$ è la segnatura dell'**ordinamento parziale**; $\Sigma_{\mathcal{PA}} = \{\{s^1\}, \{<^2\}\}$ è la segnatura dell'**aritmetica di Peano**.

Definizione 4.2 *Un simbolo di costante è un simbolo di funzione* 0*-aria.*

Definizione 4.3 *L'insieme dei termini su una data segnatura* Σ*, indicato con* $Term_\Sigma$*, è così definito:*

- $x \in Term_\Sigma$ *per ogni* x *simbolo di variabile individuale;*
- *se* $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$ *ed* f^n *è un simbolo di funzione* n*-aria di* Σ*, allora* $f^n(t_1, \ldots, t_n) \in Term_\Sigma$*;*
- *nient'altro è un termine sulla segnatura* Σ*.*

Definizione 4.4 *Sia* Σ *una segnatura con un numero al più numerabile di simboli di predicato e simboli di funzione; il linguaggio dei predicati su* Σ*,* $\mathcal{L}_\Sigma$*, è il seguente linguaggio formale:*

- *alfabeto* S*:*
  - *un insieme di variabili individuali* $(x, y, x_0, y', \ldots)$ *di cardinalità arbitrariamente grande;*
  - *i simboli di funzione (indicati con* $f, g, h, \ldots$*) e di predicato (indicati con* $P, Q, R, \ldots$*) in* Σ*;*

- *i connettivi proposizionali* $\neg$ *e* $\rightarrow$*;*
- *un simbolo di quantificazione universale:* $\forall$*;*
- *due simboli ausiliari:* (*e*)*;*
- *eventualmente, un simbolo di uguaglianza:* $=$*; se esso è presente, il linguaggio è detto essere con uguaglianza.*

Si noti che tutti i precedenti insiemi devono essere decidibili e distinti.

- *insieme delle fbf:* $W \equiv Fbf_\Sigma$ *dove* Fbf_Σ *è così definito:*
  - *se* $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$ *e* P^n *è un simbolo di predicato* n*-ario di* Σ*, allora* $P(t_1, \ldots, t_n) \in Fbf_\Sigma$ *(fbf atomiche);*
  - *se* $\alpha, \beta \in Fbf_\Sigma$ *allora* $\alpha \rightarrow \beta \in Fbf_\Sigma$ *e* $\neg\alpha \in Fbf_\Sigma$*;*
  - *se* $\alpha \in Fbf_\Sigma$ *e* x *è una variabile individuale, allora* $(\forall x\alpha) \in Fbf_\Sigma$*;*
  - *se il linguaggio è un linguaggio con uguaglianza e* $t_1, t_2 \in Term_\Sigma$ *allora* $t_1 = t_2 \in Fbf_\Sigma$ *(equazioni: anch'esse fanno parte delle fbf atomiche);*
  - *nient'altro è in* Fbf_Σ*.*

  La portata di un quantificatore del tipo: $\forall x\alpha$ *è la fbf* α*.*

Esempio: $Fbf_{\Sigma_{\mathcal{PO}}}$ contiene le seguenti fbf:

- $\neg(<(x, x))$
- $(\forall x(\forall y(\forall x(<(x, y) \wedge <(y, z) \rightarrow <(x, z)))))$

Esempio: definiamo:
$\Sigma^{=}_{\text{stack}} = \{\{\mathtt{empty}^0, \mathtt{push0}^1, \mathtt{push1}^1, \mathtt{pop}^1\}, \{\mathtt{empty?}^1, \mathtt{is0?}^1, \mathtt{is1?}^1\}\}$;
esempi di $Fbf_{\Sigma^{=}_{\text{stack}}}$ sono:

- $(\forall x\, \mathtt{pop}(\mathtt{push0}(x)) = x)$
- $\mathtt{pop}(\mathtt{empty}) = \mathtt{empty}$

Osservazione: si noti come l'ultima fbf *non abbia senso* secondo l'usuale semantica degli operatori su pile; in effetti ogni fbf dovrà avere associata una denotazione (la sua *semantica*) anche se ciò risulta in conflitto con la nostra sensibilità: non abbiamo spazio per predicati parziali; eventualmente potremmo restringere le fbf in modo che esprimano tutto e solo ciò che consideriamo *corretto* esprimere.

Definizione 4.5 *Sia* Σ *una segnatura; una struttura* $\mathcal{A}_\Sigma$ *per* Σ *è una tripla* $< A, F, P >$ *dove:*

- A *è un insieme, detto supporto di* $\mathcal{A}_\Sigma$*, indicato spesso con* $|\mathcal{A}_\Sigma|$*;*
- F *è una famiglia di funzioni tale che per ogni* $f^n \in \Sigma$ *esiste* $\tilde{f}^n \in F$*,* $\tilde{f}^n : A^n \longmapsto A$*;*
- P *è una famiglia di relazioni tale che per ogni* $P^n \in \Sigma$ *esiste* $\tilde{P}^n \in P$*,* $\tilde{P}^n : A^n \longmapsto \{0, 1\}$*.*

La cardinalità di una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ *è la cardinalità dell'insieme* $|\mathcal{A}_\Sigma|$*.*

Definizione 4.6 *Sia* Σ *una segnatura,* $\mathcal{L}_\Sigma$ *un linguaggio definito su di essa e* $\mathcal{A}_\Sigma$ *una struttura definita su di essa; un ambiente* $\rho(\equiv \rho_{\mathcal{A}_\Sigma, \mathcal{L}_\Sigma})$ *è un'applicazione:* $\rho : \mathtt{variabili\_individuali}_{\mathcal{L}_\Sigma} \longmapsto |\mathcal{A}_\Sigma|$*; inoltre defininisco l'insieme degli ambienti per un linguaggio* $\mathcal{L}_\Sigma$ *e una struttura* $\mathcal{A}_\Sigma$ *nel modo seguente:*

$$ENV^{\mathcal{L}_\Sigma, \mathcal{A}_\Sigma} = \{\rho : \mathtt{variabili\_individuali}_{\mathcal{L}_\Sigma} \longmapsto |\mathcal{A}_\Sigma|\}$$

Notazione: d'ora in poi eviteremo di specificare la struttura e il linguaggio dei predicati a cui ci riferiamo, quando essi risulteranno chiari dal contesto.

Definizione 4.7 *Un'interpretazione per termini su una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ è una funzione:*

$$[\![\_]\!]^{\mathcal{A}_\Sigma}_{\_} : Term_\Sigma \times ENV^{\mathcal{A}_\Sigma} \longmapsto |\mathcal{A}_\Sigma|$$

tale che:

1. $[\![x]\!]\rho = \rho(x)$ *per ogni* $x \in \mathtt{variabili\_individuali}_{\mathcal{L}_\Sigma}$;
2. $[\![f^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho = \tilde{f}^n([\![t_1]\!]\rho, \ldots, [\![t_n]\!]\rho)$ *per ogni* $t_1, \ldots, t_n \in Term_\Sigma$.

Definizione 4.8 *Un'interpretazione per fbf su una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ è una funzione:*

$$[\![\_]\!]^{\mathcal{A}_\Sigma}_{\_} : Fbf_\Sigma \times ENV^{\mathcal{A}_\Sigma} \longmapsto \{0, 1\}$$

tale che:

1. $[\![P^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho = \tilde{P}^n([\![t_1]\!]\rho, \ldots, [\![t_n]\!]\rho)$;
2. $[\![\alpha \to \beta]\!]\rho = 1$ *se e solo se da* $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ *segue* $[\![\beta]\!]\rho = 1$;
3. $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$ *se e solo se* $[\![\alpha]\!]\rho = 0$;
4. $[\![\forall x \alpha]\!]\rho = 1$ *se e solo se per ogni* $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ *si ha* $[\![\alpha]\!]\rho^a_x = 1$; *dove* $\rho^a_x \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ *è così definito:*

$$\rho^a_x(y) = \begin{cases} \rho(y) & \textit{se } x \not\equiv y \\ a & \textit{altrimenti;} \end{cases}$$

5. *(se il linguaggio è con uguaglianza)* $[\![t' = t'']\!]\rho = 1$ *se e solo se* $[\![t']\!]\rho$ *e* $[\![t'']\!]\rho$ *sono lo stesso elemento di* $\mathcal{A}_\Sigma$.

Definizione 4.9 *Sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$ e $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura; diremo che:*

i. α *è soddisfacibile in* $\mathcal{A}_\Sigma$ *se e solo se esiste* $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ *per cui si abbia* $[\![\alpha]\!]\rho = 1$;

ii. α *è vera in* $\mathcal{A}_\Sigma$ *(ovvero è valida in* $\mathcal{A}_\Sigma$*) se e solo se per ogni* $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ *si ha* $[\![\alpha]\!]\rho = 1$; *scriveremo allora* $\mathcal{A}_\Sigma \models \alpha$; *chiameremo teoria di* $\mathcal{A}_Sigma$ *l'insieme:* $Th(\mathcal{A}_\Sigma) = \{\alpha | \mathcal{A}_\Sigma \models \alpha\}$;

iii. α *è soddisfacibile se e solo se esiste una struttura* $\mathcal{A}_\Sigma$ *che soddisfa* α;

iv. α *è valida (o vera) se e solo se per ogni struttura* $\mathcal{A}_\Sigma$ *si ha* $\mathcal{A}_\Sigma \models \alpha$;

v. α *è contraddittoria se e solo se non è soddisfacibile.*

Osservazione: sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se α non è soddisfacibile è contraddittoria e viceversa; se α è valida allora è soddisfacibile.

Definizione 4.10 *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ e $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura; $\mathcal{A}_\Sigma$ è detta essere un modello di Γ se e solo se ogni $\alpha \in \Gamma$ è vera in $\mathcal{A}_\Sigma$, ovvero se e solo se per ogni $\alpha \in \Gamma$ si ha $\mathcal{A}_\Sigma \models \alpha$. Scriveremo allora: $\mathcal{A}_\Sigma \models \Gamma$.*

Definizione 4.11 *Introduciamo la seguente definizione esplicita:*

$$(\exists x \alpha) \equiv \neg(\forall x \neg\alpha)$$

Proposizione 4.1 *Sia $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura; $\mathcal{A}_\Sigma \models \exists x\alpha$ se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ esiste $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ tale che $[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1$; a è detto testimone dell'esistenziale.*
Dimostrazione: $\mathcal{A}_\Sigma \models \exists x\alpha$ se e solo se $\mathcal{A}_\Sigma \models \neg(\forall x \neg\alpha)$, se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\neg(\forall x\neg\alpha)]\!]\rho = 1$, se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\forall x\neg\alpha]\!] = 0$, se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ esiste $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ tale che $[\![\neg\alpha]\!]\rho_x^a = 0$, se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ esiste $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ tale che $[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1$. □

Definizione 4.12 *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ e sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$; diremo che:*

- *α è conseguenza logica di Γ se e solo se per ogni struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ e per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, da $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ segue $[\![\alpha]\!]\rho = 1$; scriveremo allora $\Gamma \models \alpha$;*
- *α è valida in Γ se e solo se per ogni struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ dal fatto che per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ segue che per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\alpha]\!]\rho = 1$.*

Proposizione 4.2 *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ e sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se $\Gamma \models \alpha$ allora α è valida in Γ.*
Dimostrazione: se per assurdo α non fosse valida in Γ, esisterebbe una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ tale che per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ e per almeno un $\tilde{\rho} \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\alpha]\!]\tilde{\rho} = 0$. Ma allora non potrebbe essere $\Gamma \models \alpha$, assurdo. □

Osservazione: non vale il viceversa: α valida in Γ non implica che $\Gamma \models \alpha$. Sia ad esempio $\Gamma = \{x = 0\}$ e $\alpha \equiv (\forall x(x = 0))$; α è valida in Γ poiché per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ se e solo se per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![x = 0]\!]\rho = 1$, il che implica $|\mathcal{A}_\Sigma| = \{\tilde{0}\}$, ovvero per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\forall x(x = 0)]\!]\rho = 1$. D'altronde $\Gamma \not\models \alpha$: si consideri ad esempio $\mathcal{A}_\Sigma \equiv \mathbb{N}$.
Osservazione: noi dimostreremo la correttezza e la completezza di $\mathcal{PL}$ rispetto alla nozione di conseguenza logica; se volessimo dimostrarle rispetto a quella di validità, saremmo costretti a sostituire in $\mathcal{PL}$ l'assioma GEN con la seguente regola GEN: $\frac{\alpha}{\forall x\alpha}$.

4.2 Sostituzioni

Porsi il problema di cosa voglia dire $\mathcal{A}_\Sigma \models \Gamma$ significa porsi il problema di cosa dica Γ dei suoi modelli. Vorremmo trovare un insieme di assiomi che caratterizzino la validità, così come gli assiomi del calcolo proposizionale caratterizzavano la tautologia. Vorremmo inoltre poter considerare equivalenti fbf del tipo: $\forall x P(x)$ e $\forall z P(z)$.

Esse sono sintatticamente distinte ma con ugual *significato*: il nome della variabile non ha importanza poiché essa è legata. D'altronde vorremmo poter fare delle *sostituzioni* senza correre il rischio che una variabile libera diventi legata dopo tale sostituzione, al fine di poter dedurre che da $\mathcal{A}_\Sigma \models \forall x\alpha(x)$ segue $\mathcal{A}_\Sigma \models \alpha(t)$ con $t \in Term_\Sigma$ e con la convenzione che $\alpha(x)$ indica una fbf in cui può figurare la variabile individuale x mentre $\alpha(t)$ indica la stessa fbf in cui ad x si è *sostituito* t.

Definizione 4.13 *Sia $t \in Term_\Sigma$ e $\alpha \in Fbf_\Sigma$; definiamo i seguenti insiemi:*

i. l'insieme $V(t)$ delle variabili presenti in t:

1. se $t \equiv x$ allora $V(t) = \{x\}$;

2. se $t \equiv f^n(t_1, \ldots, t_n)$ allora $V(t) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$;

ii. l'insieme $V(\alpha)$ delle variabili presenti in α:

1. se $\alpha \equiv P^n(t_1, \ldots, t_n)$ allora $V(\alpha) = \bigcup_{i=1}^{n} V(t_i)$;

2. *se* $\alpha \equiv \neg\beta$ *allora* $V(\alpha) = V(\beta)$*;*
3. *se* $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$ *allora* $V(\alpha) = V(\beta) \cup V(\gamma)$*;*
4. *se* $\alpha \equiv (\forall x\beta)$ *allora* $V(\alpha) = \{x\} \cup V(\beta)$*;*
5. *se il linguaggio considerato è con uguaglianza e* $\alpha \equiv (t' = t'')$ *allora* $V(\alpha) = V(t') \cup V(t'')$*;*

iii. gli insiemi $FV(\alpha)$ *e* $BV(\alpha)$ *delle variabili rispettivamente libere e legate in* α*:*

1. *se* $\alpha \equiv P^n(t_1, \ldots, t_n)$ *allora* $FV(\alpha) = V(\alpha)$ *e* $BV(\alpha) = \emptyset$*;*
2. *se* $\alpha \equiv \neg\beta$ *allora* $FV(\alpha) = FV(\beta)$ *e* $BV(\alpha) = BV(\beta)$*;*
3. *se* $\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$ *allora* $FV(\alpha) = FV(\beta) \cup FV(\gamma)$ *e* $BV(\alpha) = BV(\beta) \cup BV(\gamma)$*;*
4. *se* $\alpha \equiv \forall x\beta$ *allora* $FV(\alpha) = FV(\beta) \backslash \{x\}$ *e* $BV(\alpha) = BV(\beta) \cup \{x\}$*;*
5. *se il linguaggio considerato è con uguaglianza e* $\alpha \equiv (t' = t'')$ *allora* $FV(\alpha) = FV(t') \cup FV(t'')$ *e* $BV(\alpha) = \emptyset$*.*

Definizione 4.14 $\alpha \in Fbf_\Sigma$ *è detta chiusa se e solo se* $FV(\alpha) = \emptyset$*.*

Definizione 4.15 *Sia* $\alpha \in Fbf_\Sigma$*,* $t \in Term_\Sigma$ *e* x *una variabile individuale; diciamo che* t *è libero per* x *in* α *(ovvero è libero di essere sostituito ad* x *in* α*) se e solo se:*

- $x \notin FV(\alpha)$ *oppure*
- $x \in FV(\alpha)$ *e nessuna occorrenza libera di* x *in* α *è nella portata di un quantificatore della forma:* $\forall y$ *con* $y \in V(t)$*.*

Esempio: se $\alpha \equiv (\forall x f(x) = y) \vee (\exists x g(z) = v)$ allora il termine $h(x, u)$ non è libero in α per nessuna variabile fuorché per x; il termine $h(y, u)$ è libero in α per tutte le variabili.

Definizione 4.16 *Siano* $s, t \in Term_\Sigma$ *e* x *una variabile individuale; definiamo l'operazione di sostituire* t *ad* x *in* s *per induzione sulla struttura di* s*:*

- $[t/x]x \equiv t$*;*
- $[t/x]y \equiv y$ *per* $y \not\equiv x$*;*
- $[t/x]f^n(t_1, \ldots, t_n) \equiv f^n([t/x]t_1, \ldots, [t/x]t_n)$*.*

Definizione 4.17 *Sia* $t \in Term_\Sigma$*,* $\alpha \in Fbf_\Sigma$ *ed* x *una variabile individuale; definiamo l'operazione di sostituire* t *ad* x *in* α *per induzione sulla struttura di* α*:*

- $[t/x]P^n(t_1, \ldots, t_n) \equiv P^n([t/x]t_1, \ldots, [t/x]t_n)$*;*
- $[t/x](t' = t'') \equiv ([t/x]t' = [t/x]t'')$*;*
- $[t/x](\neg\beta) \equiv \neg[t/x]\beta$*;*
- $[t/x](\beta \rightarrow \gamma) \equiv ([t/x]\beta) \rightarrow ([t/x]\gamma)$*;*

- $[t/x](\forall y\beta) \equiv \begin{cases} \forall y\beta & \textit{se } x \notin FV(\beta); \\ \forall y[t/x]\beta & \textit{se } x \in FV(\beta) \textit{ e } y \notin FV(t); \\ [t/x](\forall z[z/y]\beta) & \textit{se } x \in FV(\beta) \textit{ e } y \in FV(t), \textit{ dove } z \textit{ è la prima variabile dell'enumerazione delle variabili individuali che non compare in } t, \textit{ libera per } y \textit{ in } \beta \textit{ e tale che } z \notin FV(\beta) \textit{ (esisterà sicuramente).} \end{cases}$

Osservazione: si noti come la precedente definizione, tramite una sostituzione preliminare di variabili, risolva il problema delle sostituzioni non possibili direttamente.

Proposizione 4.3 *Siano $t \in Term_\Sigma$, $\alpha \in Fbf_\Sigma$ ed x ed y delle variabili individuali; si ha che:*

i. se y non è presente in t allora $[x/y][y/x]t \equiv t$;

ii. se y non è presente in α allora $[x/y][y/x]\alpha \equiv \alpha$.

Dimostrazione:

i.
- $t \equiv w$ con w variabile individuale: se $w \equiv x$ il risultato è ovvio; se $w \not\equiv x$ si ha: $[x/y][y/x]w \equiv [x/y]w \equiv w$, poiché y non è presente in w;
- $t \equiv f^n(t_1, \ldots, t_n)$: il risultato segue facilmente per induzione;

ii.
- se α è una formula atomica si ha, per il punto i:

  $[x/y][y/x]P^n(t_1, \ldots, t_n) \equiv P^n([x/y][y/x]t_1, \ldots, [x/y][y/x]t_n) \equiv P^n(t_1, \ldots, t_n)$;
- se $\alpha \equiv (t' = t'')$ la tesi segue come nel caso precedente;
- se $\alpha \equiv \neg\beta$ oppure $\alpha \equiv \beta \to \gamma$ la tesi segue facilmente per induzione;
- se $\alpha \equiv \forall w\beta$, si distinguono due casi:
  - $x \notin FV(\alpha)$: poiché anche $y \notin FV(\alpha)$, la tesi segue in modo ovvio;
  - $x \in FV(\alpha)$ e quindi $x \in FV(\beta)$: si ha $y \not\equiv w$ poiché per ipotesi y non è presente in α; inoltre si ha $x \not\equiv w$ poiché $x \in FV(\alpha)$; quindi, per il secondo caso della definizione di sostituzione per fbf che cominciano con il quantificatore universale, si avrà:

    $$[x/y][y/x]\forall w\beta \equiv [x/y]\forall w[y/x]\beta \equiv \forall w[x/y][y/x]\beta$$

    dove l'ultima equivalenza, sempre corrispondente allo stesso caso della definizione di sostituzione, è giustificata dal fatto che $w \not\equiv x$ e $y \in FV([y/x]\beta)$; la tesi segue quindi per induzione.

□

Lemma 4.1 (di coincidenza) *Siano $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura, $\rho, \sigma \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, $t \in Term_\Sigma$ ed $\alpha \in Fbf_\Sigma$; valgono i due seguenti risultati:*

i. se per ogni $x \in V(t)$ si ha $\rho(x) = \sigma(x)$ allora $[\![t]\!]\rho = [\![t]\!]\sigma$ (la valutazione di un termine dipende solo dalle variabili in esso presenti);

ii. se per ogni $x \in FV(\alpha)$ si ha $\rho(x) = \sigma(x)$ allora $[\![\alpha]\!]\rho = [\![\alpha]\!]\sigma$ (la valutazione di una fbf dipende solo dalle variabili libere in essa presenti).

Dimostrazione:

i. per induzione sulla struttura del termine t:

- $t \equiv x$: $[\![t]\!]\rho = \rho(x) = \sigma(x) = [\![t]\!]\sigma$;
- $t \equiv f^n(t_1, \ldots, t_n)$: $[\![t]\!]\rho = \tilde{f}^n([\![t_1]\!]\rho, \ldots, [\![t_n]\!]\rho) =$ (per ipotesi induttiva) $\tilde{f}^n([\![t_1]\!]\sigma, \ldots, [\![t_n]\!]\sigma) = [\![t]\!]\sigma$;

ii. per induzione sulla struttura della fbf α:

- $\alpha \equiv P^n(t_1, \ldots, t_n)$: $[\![\alpha]\!]\rho = \tilde{P}^n([\![t_1]\!]\rho, \ldots, [\![t_n]\!]\rho) =$ (per il punto i, poiché $V(t_i) \subseteq FV(\alpha)$) $\tilde{P}^n([\![t_1]\!]\sigma, \ldots, [\![t_n]\!]\sigma) = [\![\alpha]\!]\sigma$;
- $\alpha \equiv \neg\beta$: $[\![\alpha]\!]\rho = 1 - [\![\beta]\!]\rho =$ (ipotesi induttiva) $1 - [\![\beta]\!]\sigma = [\![\alpha]\!]\sigma$;
- $\alpha \equiv \beta \to \gamma$: $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se da $[\![\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![\gamma]\!]\rho = 1$, se e solo se (per ipotesi induttiva) da $[\![\beta]\!]\sigma = 1$ segue $[\![\gamma]\!]\sigma = 1$, se e solo se $[\![\alpha]\!]\sigma = 1$;
- $\alpha \equiv \forall x\beta$: $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se per ogni $a \in \mathcal{A}_\Sigma$ si ha $[\![\beta]\!]\rho_x^a = 1$; ma ρ_x^a e σ_x^a coincidono su tutte le variabili libere di α e su x e quindi su $FV(\beta) \subseteq FV(\alpha) \cup \{x\}$; per ipotesi induttiva, quindi: $[\![\beta]\!]\rho_x^a = [\![\beta]\!]\sigma_x^a$, per cui: $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se per ogni $a \in \mathcal{A}_\Sigma$ si ha $[\![\beta]\!]\sigma_x^a = 1$, se e solo se $[\![\alpha]\!]\sigma = 1$.
- se il linguaggio è con uguaglianza e $\alpha \equiv (t' = t'')$ si ha: $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se $[\![t']\!]\rho$ e $[\![t'']\!]\rho$ sono lo stesso elemento di $|\mathcal{A}_\Sigma|$, se e solo se (per il punto i) $[\![t']\!]\sigma$ e $[\![t'']\!]\sigma$ sono lo stesso elemento di $|\mathcal{A}_\Sigma|$, se e solo se $[\![\alpha]\!]\sigma = 1$.

□

Corollario 4.1 *Sia $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura e $\alpha \in Fbf_\Sigma$ chiusa; α è soddisfacibile in $\mathcal{A}_\Sigma$ se e solo se α è vera in $\mathcal{A}_\Sigma$.*

Dimostrazione:

($\Leftarrow$) Ovvio.

($\Rightarrow$) Se α è soddisfacibile in $\mathcal{A}_\Sigma$ allora esiste $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ per cui $[\![\alpha]\!]\rho = 1$; poiché per ipotesi α è chiusa e quindi $FV(\alpha) = \emptyset$, ogni $\sigma \in ENV(\alpha)$ coinciderà con ρ su $FV(\alpha)$, e per il lemma di coincidenza $[\![\alpha]\!]\rho = 1$. □

Lemma 4.2 (di sostituzione) *Siano $t, s \in Term_\Sigma$, $\alpha \in Fbf_\Sigma$, x una variabile individuale e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$; si ha:*

i. $[\![[t/x]s]\!]\rho = [\![s]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$;

ii. $[\![[t/x]\alpha]\!]\rho = [\![\alpha]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$.

Dimostrazione:

i. per induzione sulla struttura di s:

- $[\![[t/x]x]\!]\rho = [\![t]\!]\rho = [\![x]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$;
- $[\![[t/x]y]\!]\rho = [\![y]\!]\rho = [\![y]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$, se $x \not\equiv y$;
- $[\![[t/x]f^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho = [\![f^n([t/x]t_1, \ldots, [t/x]t_n)]\!]\rho =$ $\tilde{f}^n([\![[t/x]t_1]\!]\rho, \ldots, [\![[t/x]t_n]\!]\rho) =$ (per ipotesi induttiva) $\tilde{f}^n([\![t_1]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}, \ldots, [\![t_n]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}) = [\![f^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$;

ii. per induzione sulla struttura di α:

- $[\![[t/x]P^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho = [\![P^n([t/x]t_1, \ldots, [t/x]t_n)]\!]\rho =$ $\tilde{P}^n([\![[t/x]t_1]\!]\rho, \ldots, [\![[t/x]t_n]\!]\rho) =$ (per il punto i) $\tilde{P}^n([\![t_1]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}, \ldots, [\![t_n]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}) = [\![P^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho}$;

- $\llbracket [t/x]\neg\beta \rrbracket\rho = \llbracket \neg[t/x]\beta \rrbracket\rho = 1 - \llbracket [t/x]\beta \rrbracket\rho =$ (per ipotesi induttiva) $1 - \llbracket \beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = \llbracket \neg\beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho}$;
- $\llbracket [t/x](\beta \to \gamma) \rrbracket\rho = \llbracket [t/x]\beta \to [t/x]\gamma \rrbracket\rho = 1$ se e solo se da $\llbracket [t/x]\beta \rrbracket\rho = 1$ segue $\llbracket [t/x]\gamma \rrbracket\rho = 1$, se e solo se (per ipotesi induttiva) da $\llbracket \beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$ segue $\llbracket \gamma \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$, se e solo se, infine: $\llbracket \beta \to \gamma \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$;
- $\llbracket [t/x](t' = t'') \rrbracket\rho = \llbracket [t/x]t' = [t/x]t'' \rrbracket\rho = 1$ se e solo se $\llbracket [t/x]t' \rrbracket\rho$ e $\llbracket [t/x]t'' \rrbracket\rho$ sono lo stesso elemento di $|\mathcal{A}_\Sigma|$, se e solo se (per il punto i) $\llbracket t' \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho}$ e $\llbracket t'' \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho}$ sono lo stesso elemento di $|\mathcal{A}_\Sigma|$, se e solo se $\llbracket t' = t'' \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$;
- $\alpha \equiv \forall y\beta$ con $x \notin FV(\alpha)$: $\llbracket [t/x]\forall y\beta \rrbracket\rho = \llbracket \forall y\beta \rrbracket\rho = \llbracket \forall y\beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho}$, dove l'ultimo passaggio è giustificato dal lemma di coincidenza, poiché ρ e $\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho}$ coincidono su tutte le variabili libere di $\forall y\beta$;
- $\alpha \equiv \forall y\beta$ con $x \in FV(\alpha)$ e $y \notin FV(t)$: sarà $x \not\equiv y$ poiché altrimenti $x \notin FV(\alpha)$; quindi: $\llbracket [t/x]\forall y\beta \rrbracket\rho = \llbracket \forall y[t/x]\beta \rrbracket\rho = 1$ se e solo se per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket [t/x]\beta \rrbracket\rho_y^a = 1$, se e solo se (per ipotesi induttiva) per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket \beta \rrbracket(\rho_y^a)_x^{\llbracket t \rrbracket\rho_y^a} = 1$, se e solo se (poiché $x \not\equiv y$, $y \notin FV(t)$ e sfruttando il lemma di coincidenza) per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket \beta \rrbracket(\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho})_y^a = 1$, se e solo se $\llbracket \forall y\beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$;
- $\alpha \equiv \forall y\beta$ con $x \in FV(\alpha)$ e $y \in FV(t)$: $\llbracket [t/x]\forall y\beta \rrbracket\rho =$ $\llbracket [t/x](\forall z[z/y]\beta) \rrbracket\rho =$ (poiché $x \in FV(\alpha)$ e $z \notin FV(t)$, seguendo la definizione di sostituzione di un termine in una formula ben formata) $\llbracket \forall z[t/x][z/y]\beta \rrbracket\rho = 1$ se e solo se per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket [t/x][z/y]\beta \rrbracket\rho_z^a =$ 1, se e solo se (per ipotesi induttiva) per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket [z/y]\beta \rrbracket(\rho_z^a)_x^{\llbracket t \rrbracket\rho_z^a} =$ 1, se e solo se (per ipotesi induttiva) per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket \beta \rrbracket((\rho_z^a)_x^{\llbracket t \rrbracket\rho_z^a})_y^{\llbracket z \rrbracket(\rho_z^a)_x^{\llbracket t \rrbracket\rho_z^a}} =$ 1, se e solo se per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket \beta \rrbracket((\rho_z^a)_x^{\llbracket t \rrbracket\rho_z^a})_y^a = 1$, se e solo se (poiché z, essendo *nuova*, è diversa da x e poiché $z \notin FV(t)$) per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $\llbracket \beta \rrbracket(\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho})_y^a = 1$, se e solo se $\llbracket \forall y\beta \rrbracket\rho_x^{\llbracket t \rrbracket\rho} = 1$.

□

4.3 Il sistema formale $\mathcal{PL}$

Definizione 4.18 *Sia Σ una segnatura; il sistema formale $\mathcal{PL}_\Sigma$ (calcolo dei predicati su segnatura Σ) è il sistema formale ottenuto estendendo il linguaggio formale $\mathcal{L}_\Sigma$ (definizione 4.4) con:*

- *Ax:*
  - *gli schemi di assioma di $\mathcal{P}_0$:*
    - $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ *(Ak);*
    - $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ *(AS);*
    - $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$ *(A¬);*
  - $\alpha \to \forall x\alpha$ *se* $x \notin FV(\alpha)$ *(AV: assioma della variabile);*
  - $\forall x\alpha \to [t/x]\alpha$ *(SPEC: specificazione);*
  - $(\forall x(\alpha \to \beta)) \to ((\forall x\alpha) \to (\forall x\beta))$ *(∀/ →);*
  - *se il linguaggio è con uguaglianza:*
    - $t = t$ *(E0);*

  * $t_1 = t'_1 \rightarrow (t_2 = t'_2 \rightarrow \ldots f(t_1, \ldots, t_n) = f(t'_1, \ldots, t'_n) \ldots)$ *per ogni* f^n *simbolo di funzione in* Σ *(E1);*
  * $t_1 = t'_1 \rightarrow (t_2 = t'_2 \rightarrow \ldots P(t_1, \ldots, t_n) \rightarrow P(t'_1, \ldots, t'_n) \ldots)$ *per ogni* P^n *simbolo di predicato in* Σ *e per* $P^2 \equiv =$ *(E2);*

- *tutte le generalizzazioni dei precedenti assiomi, dove, se* $\alpha \in Fbf_\Sigma$ *e* $x_1, \ldots, x_k$ *sono variabili individuali,* $k \geq 1$*, una generalizzazione di* α *è* $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k \alpha$*; chiamiamo chiusura di* α *la generalizzazione di* α *ottenuta con* $\{x_1, \ldots, x_k\} = FV(\alpha)$*; la indicheremo con* $\forall\alpha$ *(GEN o assiomi dell'ultima classe);*

- $\mathcal{R} = \{MP\}$ *dove* MP *(modus ponens) è la regola:* $\frac{\alpha \quad \alpha\rightarrow\beta}{\beta}$.

Osservazione: d'ora innanzi eviteremo di specificare la segnatura cui ci riferiamo, quando questo non comporterà ambiguità, e scriveremo quindi $\mathcal{PL}$ piuttosto che $\mathcal{PL}_\Sigma$. Se il linguaggio è con uguaglianza, scriveremo più propriamente $\mathcal{PL}^=$.

Teorema 4.1 (di deduzione) *Siano* $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ *e* $\alpha, \beta \in Fbf_\Sigma$*; si ha che:*

$$\boxed{\textit{se } \Gamma, \alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \beta \textit{ allora } \Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \rightarrow \beta}$$

Dimostrazione: come in $\mathcal{P}_0$. □

Osservazione: questo teorema non sarebbe più valido nel caso in cui si fosse assiomatizzato $\mathcal{PL}$ in funzione della relazione di validità piuttosto che in funzione di quella di conseguenza logica; varrebbe solo se α fosse chiusa.

Proposizione 4.4 $\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \rightarrow \gamma$.
Dimostrazione: come in $\mathcal{P}_0$ (proposizione 3.3). □

Proposizione 4.5 *Siano* $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$*,* $\alpha \in Fbf_\Sigma$*,* c^0 *un simbolo di costante di* Σ *non presente in* Γ *e* y *una variabile individuale; allora da* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [c/x]\alpha$ *segue* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$*.*
Dimostrazione: per induzione sulla derivazione $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [c/x]\alpha$:

- $[c/x]\alpha$ è un assioma: ma allora anche $[y/x]\alpha$ è un assioma e quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$;

- $[c/x]\alpha \in \Gamma$: questo implica che x non è presente in α, poiché altrimenti $[c/x]\alpha$ conterrebbe c e quindi Γ stesso conterrebbe c, il che è assurdo. Ma allora $[c/x]\alpha \equiv \alpha \equiv [y/x]\alpha$, e quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$;

- $[c/x]\alpha$ è ottenuto per modus ponens: $\frac{\beta\rightarrow[c/x]\alpha \quad \beta}{[c/x]\alpha}$; sia z una variabile fresca per β ed α (cioè non presente né in β né in α); si ha: $\beta \rightarrow [c/x]\alpha \equiv [c/z](\beta \rightarrow [z/x]\alpha)$; quindi, per ipotesi induttiva, da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [c/z](\beta \rightarrow [z/x]\alpha)$ segue $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/z](\beta \rightarrow [z/x]\alpha)$, ovvero $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} (\beta \rightarrow [y/x]\alpha)$; per modus ponens, poiché $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \beta$, si ha infine $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$.

□

Proposizione 4.6 (regola di generalizzazione) *Siano* $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$*,* x *una variabile individuale e* $\alpha \in Fbf_\Sigma$*; se* $x \notin FV(\alpha)$ *oppure* $x \notin FV(\Gamma)$ *allora da* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ *segue* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\alpha$*.*
Dimostrazione: se $x \notin FV(\alpha)$ la tesi segue semplicemente dall'assioma AV; altrimenti, se $x \notin FV(\Gamma)$, dimostriamo la tesi per induzione sulla derivazione $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$:

- α è un assioma: $\forall x\alpha$ è ancora un assioma per l'assioma GEN e quindi $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\alpha$;
- $\alpha \in \Gamma$: da $x \notin FV(\Gamma)$ segue $x \notin FV(\alpha)$, per cui la tesi segue tramite l'assioma AV;
- α è ottenuta per modus ponens: $\frac{\beta\to\alpha \quad \beta}{\alpha}$; per ipotesi induttiva so che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x(\beta \to \alpha)$ e che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\beta$, per cui:

1.	$(\forall x(\beta \to \alpha)) \to ((\forall x\beta) \to (\forall x\alpha))$	$\forall/\to$;
$\vdots$		
k	$\forall x(\beta \to \alpha)$	espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x(\beta \to \alpha)$
k+1	$(\forall x\beta) \to (\forall x\alpha)$	$MP(1, k)$
$\vdots$		
h	$\forall x\beta$	espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\beta$
h+1	$\forall x\alpha$	$MP(k+1, h)$

□

Osservazione: nell'assiomatizzazione di $\mathcal{PL}$ in funzione della relazione di validità, da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ segue sempre $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\alpha$.

Corollario 4.2 *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$, $\alpha \in Fbf_\Sigma$, c^0 un simbolo di costante non in Γ e x, y delle variabili individuali, con $y \notin FV(\Gamma)$; da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [c/x]\alpha$ segue $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall y[y/x]\alpha$.*
Dimostrazione: direttamente dalle proposizioni 4.5 e 4.6. □

Proposizione 4.7 (legge di ridenominazione delle variabili legate) *Sia y una variabile individuale ed $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se $y \notin FV(\forall x\alpha)$ allora si ha: $\vdash_{\mathcal{PL}} (\forall x\alpha \to \forall y[y/x]\alpha)$.*
Dimostrazione:

1.	$\forall x\alpha \to [y/x]\alpha$	$SPEC$
2.	$\forall y(\forall x\alpha \to [y/x]\alpha)$	$GEN\ SPEC$
3.	$\forall y(\forall x\alpha \to [y/x]\alpha) \to ((\forall y\forall x\alpha) \to \forall y[y/x]\alpha)$	$(\forall/\to)$
4.	$(\forall y\forall x\alpha \to \forall y[y/x]\alpha)$	$MP(2, 3)$
5.	$\forall x\alpha \to \forall y\forall x\alpha$	AV poiché $y \notin FV(\forall x\alpha)$
6.	$\forall x\alpha \to \forall y[y/x]\alpha$	proposizione 4.4

□

Proposizione 4.8 *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$, $\alpha \in Fbf_\Sigma$ ed x ed y due variabili individuali, con y non presente né in α né in Γ; si ha che da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$ segue $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\alpha$.*
Dimostrazione: da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\alpha$ segue, grazie alla proposizione 4.6, che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall y[y/x]\alpha$, da cui segue quindi, grazie alla proposizione 4.7, che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x[x/y][y/x]\alpha$, il che implica infine, per la proposizione 4.3, che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\alpha$. □

Definizione 4.19 *Definiamo un'operazione $(\_)^*_\Sigma : Fbf_\Sigma \longmapsto fbf_{\mathcal{P}_0}$ nel modo seguente:*

- $(P^n(t_1, \ldots, t_n))^*_\Sigma = P$;

- $(\alpha \to \beta)^*_\Sigma = (\alpha)^*_\Sigma \to (\beta)^*_\Sigma$;
- $(\neg\alpha)^*_\Sigma = \neg(\alpha)^*_\Sigma$;
- $(\forall x\alpha)^*_\Sigma = (\alpha)^*_\Sigma$.

Teorema 4.2 *Sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se $\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ allora $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\alpha)^*_\Sigma$ (la traduzione $(\_)^*_\Sigma$ è una relativa interpretazione di $\mathcal{PL}_\Sigma$ in $\mathcal{P}_0$).*
Dimostrazione: lo dimostreremo per induzione sulla lunghezza della derivazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \equiv \alpha$ che per ipotesi abbiamo in $\mathcal{PL}$:

- $k = 1$: $\alpha \equiv \alpha_k$ sarà un assioma:
  - $\alpha \equiv Ak, AS$ oppure $A\neg$: $(\alpha)^*_\Sigma$ è un assioma di $\mathcal{P}_0$ e quindi $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$;
  - $\alpha \equiv \beta \to \forall x\beta$: $(\alpha)^*_\Sigma \equiv (\beta)^*_\Sigma \to (\beta)^*_\Sigma$ e sappiamo già che $\vdash_{\mathcal{P}_0} \gamma \to \gamma$ per ogni fbf γ (proposizione 3.1);
  - $\alpha \equiv (\forall x(\gamma \to \beta)) \to (\forall x\gamma \to \forall x\beta)$: $(\alpha)^*_\Sigma \equiv ((\gamma)^*_\Sigma \to (\beta)^*_\Sigma) \to ((\gamma)^*_\Sigma \to (\beta)^*_\Sigma)$ e possiamo sfruttare ancora la proposizione 3.1;
  - $\alpha \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_k\beta$: $(\alpha)^*_\Sigma \equiv (\beta)^*_\Sigma$ e β è uno degli assiomi precedenti: quindi $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\alpha)^*_\Sigma$;
- $k > 1$: se α è un assioma la tesi segue come nel caso $k = 1$; altrimenti sarà stata ottenuta per modus ponens: $\frac{\beta\to\alpha \quad \beta}{\alpha}$: per ipotesi induttiva so che $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\beta \to \alpha)^*_\Sigma$ e $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\beta)^*_\Sigma$; ma allora $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\beta)^*_\Sigma \to (\alpha)^*_\Sigma$ e per modus ponens (in $\mathcal{P}_0$) concludo $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\alpha)^*_\Sigma$.

□

Corollario 4.3 *$\mathcal{PL}$ è consistente.*
Dimostrazione: se non lo fosse, per il corollario 3.1 esisterebbe $\gamma \in Fbf_\Sigma$ tale che $\vdash_{\mathcal{PL}} \gamma$ e $\vdash_{\mathcal{PL}} \neg\gamma$; per il teorema precedente $\vdash_{\mathcal{P}_0} (\gamma)^*_\Sigma$ e $\vdash_{\mathcal{P}_0} \neg(\gamma)^*_\Sigma$; il che è assurdo per il corollario 3.3. □

Osservazione: se $\alpha \in Fbf_\Sigma$ è scritta nel linguaggio di $\mathcal{P}_0$ si ha $(\alpha)^*_\Sigma \equiv \alpha$; in tal caso, grazie al teorema 4.2, da $\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ segue $\vdash_{\mathcal{P}_0} \alpha$; diremo allora che $\mathcal{PL}$ è un'*estensione conservativa* di $\mathcal{P}_0$: estensione poiché tutte le derivazioni di $\mathcal{P}_0$ sono anche derivazioni di $\mathcal{PL}$, conservativa poiché se α, nel linguaggio di $\mathcal{P}_0$, è dimostrabile in $\mathcal{PL}$, allora essa è dimostrabile in $\mathcal{P}_0$.

Proposizione 4.9 *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ e $\alpha, \beta \in Fbf_\Sigma$; si hanno i seguenti fatti:*

i. $\vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\alpha \to \neg\exists x\alpha$ *e* $\vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\alpha \to \forall x\neg\alpha$;

ii. $\alpha, \neg\beta \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\alpha \to \beta)$;

iii. *se* $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ *allora* $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ *è consistente;*

iv. $\vdash_{\mathcal{PL}} \forall x(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \wedge \forall x\beta$, *purché* $x \notin FV(\alpha)$;

v. *se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\alpha \to \beta)$ *allora* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \wedge \neg\beta$;

vi. *se* $\beta \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ *allora* $\neg\exists x\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\beta$;

vii. *se* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \wedge \beta$ *allora* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \beta$.

Dimostrazione:

i. $\vdash_{\mathcal{PL}} \forall x \neg\alpha \to \neg\exists x\alpha$ se e solo se $\vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\alpha \to \neg\neg(\forall x\neg\alpha)$, ovvio poiché $\vdash_{\mathcal{PL}} \gamma \to \neg\neg\gamma$ per ogni $\gamma \in Fbf_{\Sigma}$, il che è ottenibile con una dimostrazione identica a quella corrispondente in $\mathcal{P}_0$ (proposizione 3.8). Similmente si dimostra che $\vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\alpha \to \forall x\neg\alpha$ (sfruttando la proposizione 3.6).

ii. La proposizione 3.21 ci assicura che esiste una derivazione in $\mathcal{P}_0$ che dimostra che $\alpha, \neg\beta \vdash_{\mathcal{P}_0} \neg(\alpha \to \beta)$ per α e β fbf di $\mathcal{P}_0$; tale derivazione è anche una derivazione in $\mathcal{PL}$ se α e β appartengono a Fbf_{Σ}.

iii. La dimostrazione è identica a quella in $\mathcal{P}_0$ (teorema 3.3).

iv. Esplicitando le definizioni implicite e sfruttando il teorema di deduzione (teorema 4.1) mi riconduco a dimostrare che, se $x \notin FV(\alpha)$, si ha:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\neg\alpha \to \neg\forall x\beta).$$

D'altronde sappiamo che, grazie all'assioma $SPEC$:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$$

con y variabile individuale non presente né in α né in β. Poiché $x \notin FV(\alpha)$:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\neg\alpha \to \neg[y/x]\beta)$$

e grazie alle proposizioni 3.11 e 3.12, le cui dimostrazioni sono valide anche in $\mathcal{PL}$, ottengo:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\alpha \text{ e } \forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg[y/x]\beta$$

cioè, grazie alla proposizione 3.6, la cui dimostrazione è valida anche in $\mathcal{PL}$:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\beta.$$

Grazie alla proposizione 4.8:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\beta;$$

infine, sfruttando l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.8, da:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\alpha \text{ e } \forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\forall x\beta)$$

segue, grazie al punto ii:

$$\forall x\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\neg\alpha \to \neg\forall x\beta)$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare.

v. Devo mostrare che da $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\alpha \to \beta)$ segue $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$:

1.	$\neg(\alpha \to \beta)$	espansione di $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\alpha \to \beta)$
2.	α	da 1, per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.11
3.	$\neg\beta$	da 1, per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.12

4. $\neg\neg\alpha$ — da 2, per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.8
5. $\neg\neg(\neg\beta)$ — da 3, per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.8
6. $\neg(\neg\neg\alpha \to \neg\neg\beta)$ — da 4 e 5, per il punto ii

vi. $\neg\exists x\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\beta$ se e solo se, esplicitando le definizioni implicite, $\neg\neg\forall x\neg\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\forall x\neg\beta$; basta quindi mostrare che $\forall x\neg\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\beta$ (poiché allora, per l'estensione a $\mathcal{PL}$ delle proposizioni 3.6 e 3.8, $\neg\neg\forall x\neg\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\alpha$ implica $\neg\neg\forall x\neg\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\beta$ che implica a sua volta $\neg\neg\forall x\neg\alpha \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\forall x\neg\beta$); ma a tal fine basta mostrare, per l'assioma $\forall/\to$, che $\forall x(\neg\alpha \to \neg\beta)$; ma questo è certamente vero: $\beta \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ se e solo se $\vdash_{\mathcal{PL}} \beta \to \alpha$, se e solo se (estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.10) $\vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha \to \neg\beta$, se e solo se (proposizione 4.6, poiché x non è presente in $\emptyset$) $\vdash_{\mathcal{PL}} \forall x(\neg\alpha \to \neg\beta)$.

vii. $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \wedge \beta$ se e solo se $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\neg\neg\alpha \to \neg\beta)$, se e solo se, grazie alle estensioni a $\mathcal{PL}$ delle proposizioni 3.11 e 3.12: $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\beta$, e per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.6 si ottiene la tesi.

□

Proposizione 4.10 *La relazione $=$ fra i termini di $\mathcal{PL}^=$ gode delle proprietà di riflessività, simmetria e transitività.*
Dimostrazione:

- riflessività: ovvio per l'assioma $E0$;
- simmetria: devo mostrare che $\vdash_{\mathcal{PL}^=} s = t \to t = s$ ovvero, per il teorema di deduzione (teorema 4.1), che $s = t \vdash_{\mathcal{PL}^=} t = s$:

  1. $s = t \to (s = s \to (s = s \to t = s))$ — $E2$ con $P^2 \equiv =$
  2. $s = t$ — ipotesi
  3. $s = s \to (s = s \to t = s)$ — $MP(1,2)$
  4. $s = s$ — $E0$
  5. $s = s \to t = s$ — $MP(3,4)$
  6. $s = s$ — $E0$
  7. $t = s$ — $MP(5,6)$

- transitività: devo mostrare che $\vdash_{\mathcal{PL}^=} s = t \to (t = r \to s = r)$ ovvero, tramite iterata applicazione del teorema di deduzione (teorema 4.1), che $s = t, t = r \vdash_{\mathcal{PL}^=} s = r$:

  1. $s = s \to (t = r \to (s = t \to s = r))$ — $E2$ con $P^2 \equiv =$
  2. $s = s$ — $E0$
  3. $t = r \to (s = t \to s = r)$ — $MP(1,2)$
  4. $t = r$ — ipotesi
  5. $s = t \to s = r$ — $MP(3,4)$
  6. $s = t$ — ipotesi
  7. $s = r$ — $MP(5,6)$

□

4.4 Correttezza e completezza di $\mathcal{PL}$

Teorema 4.3 (di correttezza) *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ e $\alpha \in Fbf_\Sigma$; si ha che:*

$$\boxed{\textit{se } \Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \textit{ allora } \Gamma \models \alpha}$$

Dimostrazione: per induzione sulla derivazione $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$:

- α è un assioma:
  - $Ak, AS, A\neg, E0, E1, E2$: si ha $\Gamma \models \alpha$; ad esempio, per Ak, cioè per $\alpha \to (\beta \to \alpha)$:

$[\![\alpha]\!]\rho$	$[\![\beta]\!]\rho$	$[\![\beta \to \alpha]\!]\rho$	$[\![Ak]\!]\rho$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

  - AV: $\alpha \equiv \beta \to \forall x\beta$ con $x \notin FV(\beta)$; dati $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, $[\![\beta \to \forall x\beta]\!]\rho = 1$ se e solo se da $[\![\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![\forall x\beta]\!]\rho = 1$, se e solo se da $[\![\beta]\!]\rho = 1$ segue che per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $[\![\beta]\!]\rho_x^a = 1$, se e solo se (per il lemma di coincidenza) da $[\![\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![\beta]\!]\rho = 1$, il che è chiaramente vero;
  - $SPEC$: $\alpha \equiv \forall x\beta \to [t/x]\beta$; dati $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se da $[\![\forall x\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![[t/x]\beta]\!]\rho = 1$, se e solo se (per il lemma di sostituzione) da $[\![\forall x\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![\beta]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho} = 1$, se e solo se dal fatto che per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $[\![\beta]\!]\rho_x^a = 1$ segue che $[\![\beta]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho} = 1$, il che è chiaramente vero;
  - $\forall/\to$: $\alpha \equiv (\forall x(\alpha \to \beta)) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$: dati una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ e un ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se da $[\![\forall x(\alpha \to \beta)]\!]\rho = 1$ segue che $[\![\forall x\alpha \to \forall x\beta]\!]\rho = 1$, se e solo se (usando la notazioni sintattica di $\mathcal{PL}$ anche per il metalinguaggio):
    $(\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|[\![\alpha \to \beta]\!]\rho_x^a = 1) \Rightarrow$
    $((\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1) \Rightarrow (\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|[\![\beta]\!]\rho_x^a = 1))$
    se e solo se
    $(\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|([\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1 \Rightarrow [\![\beta]\!]rho_x^a = 1)) \Rightarrow$
    $((\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1) \Rightarrow (\forall a \in |\mathcal{A}_\Sigma|[\![\beta]\!]\rho_x^a = 1))$
    il che è vero (è un'istanza dell'assioma $\forall/\to$ all'interno del metalinguaggio);
  - GEN: $\alpha \equiv$ generalizzazione di β, con β uno dei precedenti assiomi: dati una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ e un ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se $[\![\forall x_1 \dots \forall x_k\beta]\!]\rho = 1$, se e solo se per ogni $a_1, \dots, a_k \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si ha $[\![\beta]\!]\rho_{x_1,\dots,x_k}^{a_1,\dots,a_k} = 1$, se e solo se (per il lemma di sostituzione) $[\![[a_k/x_k]\dots[a_1/x_1]\beta]\!] = 1$, ovvio poiché dopo le sostituzioni ottengo un'istanza di uno degli assiomi precedenti;
- $\alpha \in \Gamma$: dati $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, da $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ segue $[\![\alpha]\!]\rho = 1$;
- α è ottenuta per modus ponens: $\frac{\beta\to\alpha \quad \beta}{\alpha}$; per ipotesi induttiva so che $\Gamma \models \beta \to \alpha$ e che $\Gamma \models \beta$; dati $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha quindi:

$$\left.\begin{array}{r}[\![\Gamma]\!]\rho = 1 \Rightarrow [\![\beta \to \alpha]\!]\rho = 1 \\ [\![\Gamma]\!]\rho = 1 \Rightarrow [\![\beta]\!]\rho = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(definizione di } [\![\_]\!]) \ [\![\alpha]\!]\rho = 1.$$

$\square$

Corollario 4.4 *Se $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ è soddisfacibile allora è anche consistente.*
Dimostrazione: se non lo fosse esisterebbe $\alpha \in Fbf_\Sigma$ tale che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$ e, per correttezza, si avrebbe $\Gamma \models \alpha$ e $\Gamma \models \neg\alpha$, il che è assurdo. $\square$

Definizione 4.20 *Sia Σ una segnatura e Γ un insieme di fbf nel linguaggio di Σ; diciamo che Γ ha testimoni in Σ (ovvero che $Con(\Gamma)$ è una teoria di Henkin) se e solo se per ogni fbf nel linguaggio di Σ della forma $\exists x\alpha$ (non necessariamente in Γ) esiste c^0, simbolo di costante del linguaggio di Σ, tale che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha \to [c/x]\alpha$.*

Lemma 4.3 (di Henkin) *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ consistente; definiamo una segnatura $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{c_n | n \in \mathbb{N}\}$ con i vari c_n simboli di costante non appartenenti a Σ; l'insieme $Fbf_{\tilde{\Sigma}}$ è ancora numerabile; enumero quindi tutte le fbf esistenziali di $Fbf_{\tilde{\Sigma}}$: $e_k = \{\exists x(\alpha_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$; pongo infine:*

$\Gamma_0 = \Gamma$;

$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists x\alpha_n \to [c_n/x]\alpha_n\}$;

$\tilde{\Gamma} = \bigcup_{n\geq 0} \Gamma_n$.

$\tilde{\Gamma}$ è consistente ed ha testimoni in $\tilde{\Sigma}$.

Dimostrazione: la dimostrazione procede per passi:

1. Γ_n è consistente per ogni $n \in \mathbb{N}$:
   - se $n = 0$ è ovvio;
   - sia Γ_n consistente; se per assurdo Γ_{n+1} non lo fosse, per il punto iii della proposizione 4.9, per contrapposizione, si avrebbe:

$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \neg(\exists x\alpha_n \to [c_n/x]\alpha_n)$$
$$\Downarrow$$
(per il punto v della stessa proposizione)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_n \wedge \neg[c_n/x]\alpha_n$$
$$\Downarrow$$
(per il corollario 4.2, con y non presente né in Γ_n né in α_n)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \forall y(\exists x\alpha_n \wedge \neg[y/x]\alpha_n)$$
$$\Downarrow$$
(per il punto iv del lemma 4.9, poiché $y \notin FV(\exists x\alpha_n)$)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_n \wedge \forall y\neg[y/x]\alpha_n$$
$$\Downarrow$$
(punto vii della proposizione 4.9)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_n \quad \text{e} \quad \Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \forall y\neg[y/x]\alpha_n$$
$$\Downarrow$$
(per la proposizione 4.7, poiché $x \notin FV(\forall y\neg[y/x]\alpha_n)$)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x[x/y](\neg[y/x]\alpha_n)$$
$$\Downarrow$$
(per la proposizione 4.3, poiché y non è presente in α_n)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\alpha_n$$
$$\Downarrow$$
(per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.8)
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\forall x\neg\alpha_n$$
$$\Downarrow$$
$$\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\alpha_n$$

per cui $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_n$ e $\Gamma_n \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\alpha_n$, assurdo poiché Γ_n è consistente.

2. $\tilde{\Gamma}$ è consistente: se non lo fosse si avrebbe $\tilde{\Gamma} \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $\tilde{\Gamma} \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$ per un'opportuna $\alpha \in Fbf_{\tilde{\Sigma}}$; poiché $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$, esisterebbe quindi un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\Gamma_{\bar{n}} \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $\Gamma_{\bar{n}} \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$, assurdo poiché, per il punto 1, $\Gamma_{\bar{n}}$ è consistente.

3. $\tilde{\Gamma}$ ha testimoni in $\tilde{\Sigma}$: data una fbf esistenziale della forma $\exists x\alpha \equiv \exists x\alpha_h$ per un opportuno $h \in \mathbb{N}$, basta mostrare che $\tilde{\Gamma} \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_h \to [c_h/x]\alpha_h$; ma questo è ovvio poiché $\Gamma_h \subseteq \tilde{\Gamma}$ e $\Gamma_h \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha_h \to [c_h/x]\alpha_h$.

□

Lemma 4.4 (di Lindenbaum) *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ consistente; esiste un insieme $\Gamma^* \subseteq Fbf_\Sigma$ consistente massimale tale che $\Gamma \subseteq \Gamma^*$. Inoltre, se Γ ha testimoni in Σ anche Γ^* ha testimoni in Σ.*
Dimostrazione: per l'esistenza si procede come in $\mathcal{P}_0$. Se Γ ha testimoni in Σ, per ogni fbf esistenziale del tipo $\exists x\alpha$ si avrà $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha \to [c/x]\alpha$, per un opportuno simbolo di costante c di Σ; poiché $\Gamma \subseteq \Gamma^*$, si avrà quindi: $\Gamma^* \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\alpha \to [c/x]\alpha$.

Lemma 4.5 (di soddisfacibilità) *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$; se Γ è consistente allora è soddisfacibile.*
Dimostrazione: applico a Γ i lemmi di Henkin e Lindenbaum nel modo seguente:

$$\Gamma \overset{\text{Henkin}}{\rightsquigarrow} \tilde{\Gamma} \overset{\text{Lindenbaum}}{\rightsquigarrow} \tilde{\Gamma}^* \overset{\text{def}}{\equiv} T$$

con T consistente massimale con testimoni in $\tilde{\Sigma}$. Per $t, s \in Term_{\tilde{\Sigma}}$ definiamo: $t \sim s$ se e solo se $t = s \in T$; se il linguaggio dei predicati considerato non ammettesse uguaglianza, si sarebbe potuto definire similmente $t \sim s$ se e solo se $t \equiv s \in T$. $\sim$ è una relazione di equivalenza in $Term_{\tilde{\Sigma}}$: infatti T è una teoria per il punto i della proposizione 3.16 estesa a $\mathcal{PL}$ e $=$ è riflessiva, simmetrica e transitiva per la proposizione 4.10; quindi, per dimostrare ad esempio la riflessività di $\sim$: $s \sim t$ se e solo se $s = t \in T$, il che implica (T è una teoria e $s = t \vdash_{\mathcal{PL}} t = s$) $t = s \in T$, da cui infine $t \sim s$.

Definiamo la struttura $\mathcal{A} =< Term_{\tilde{\Sigma}/\sim}, F, P >$ tale che per ogni simbolo di funzione f^n in $\tilde{\Sigma}$ esiste $\tilde{f}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim} \in F$ tale che:

$$\tilde{f}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^n(t_1, \ldots, t_n)]$$

e per ogni simbolo di predicato $P^n \in \tilde{\Sigma}$ esiste $\tilde{P}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim} \in P$ tale che:

$$\tilde{P}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) = 1 \text{ se e solo se } P^n(t_1, \ldots, t_n) \in T$$

dove $[t_i]$ è la classe di equivalenza di t_i rispetto a $\sim$.

Osserviamo che le definizioni sono ben poste; ad esempio, per le funzioni:

$$\begin{gathered}
t_1 \sim t'_1, \ldots, t_n \sim t'_n \\
\Downarrow \\
t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n \in T \\
\Downarrow \\
\text{(poiché } T \text{ è una teoria e per l'assioma } E1\text{)} \\
f^n(t_1, \ldots, t_n) = f^n(t'_1, \ldots, t'_n) \in T \\
\Downarrow \\
f^n(t_1, \ldots, t_n) \sim f^n(t'_1, \ldots, t'_n) \\
\Downarrow \\
[f^n(t_1, \ldots, t_n)] = [f^n(t'_1, \ldots, t'_n)]
\end{gathered}$$

Definiamo $\rho \in ENV^{\mathcal{A}}$ tale che per ogni variabile individuale x si abbia $\rho(x) = [x]$. È facilmente dimostrabile che per ogni $t \in Term_{\tilde{\Sigma}/\sim}$ si ha $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = [t]$:

- se $t \equiv y$ con y variabile individuale si ha $[\![t]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = [\![y]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = [y] = [t]$;
- se $t \equiv f^n(t_1, \ldots, t_n)$ si ha $[\![f^n(t_1, \ldots, t_n)]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = \tilde{f}_{\tilde{\Sigma}/\sim}([\![t_1]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho}, \ldots, [\![t_n]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho}) =$ (per ipotesi induttiva)$\tilde{f}_{\tilde{\Sigma}/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^n(t_1, \ldots, t_n)]$.

Dimostriamo adesso che per ogni $\alpha \in T$ si ha $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{A}}_{\rho} = 1$, da cui segue la tesi poiché $\Gamma \subseteq T$. Dimostreremo una equivalenza poiché avremo bisogno della direzione opposta dell'enunciato nel caso del $\neg$. La dimostrazione è effettuata per induzione su α:

- $\alpha \equiv P^n(t_1, \ldots, t_n)$: per quanto appena dimostrato sopra si ha: $[\![\alpha]\!]\rho = \tilde{P}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim}([\![t_1]\!]\rho, \ldots, [\![t_n]\!]\rho) = \tilde{P}^n_{\tilde{\Sigma}/\sim}([t_1], \ldots, [t_n]) = 1$ se e solo se, per definizione, $P^n(t_1, \ldots, t_n) \in T$;
- $\alpha \equiv t = s$: $[\![t = s]\!]\rho = 1$ se e solo se $[\![t]\!]\rho = [\![s]\!]\rho$ se e solo se $[t] = [s]$ se e solo se $t \sim s$ se e solo se $t = s \in T$;
- $\alpha \equiv \neg\beta$: $[\![\neg\beta]\!]\rho = 1$ se e solo se $[\![\beta]\!]\rho = 0$ se e solo se (per ipotesi induttiva) $\beta \notin T$ se e solo se (punto ii della proposizione 3.16) $\neg\beta \in T$;
- $\alpha \equiv \beta \to \gamma$: $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ se e solo se da $[\![\beta]\!]\rho = 1$ segue $[\![\gamma]\!]\rho = 1$, se e solo se (per ipotesi induttiva) da $\beta \in T$ segue $\gamma \in T$ se e solo se (punto iii della proposizione 3.16) $\beta \to \gamma \in T$;
- $\alpha \equiv \forall x\beta$:

  ($\Rightarrow$) $[\![\forall x\beta]\!]\rho = 1$ implica che per ogni $a \in |\mathcal{A}|$ si abbia $[\![\beta]\!]\rho^a_x = 1$, ovvero che per ogni simbolo di costante c in $\tilde{\Sigma}$ si abbia $[\![\beta]\!]\rho^{[c]}_x = 1$, poiché $|\mathcal{A}|$ non è altro che $Term_{\tilde{\Sigma}/\sim}$; ma allora, per quanto mostrato sopra, per ogni simbolo di costante c in $\tilde{\Sigma}$ si ha $[\![\beta]\!]\rho^{[\![c]\!]\rho}_x = 1$ e, per il lemma di sostituzione, $[\![[c/x]\beta]\!]\rho = 1$; per ipotesi induttiva, quindi, si ha $[c/x]\beta \in T$ per ogni simbolo di costante c in $\tilde{\Sigma}$. Consideriamo la fbf: $\exists x\neg\beta$; si ha $T \nvdash_{\mathcal{PL}} \exists x\neg\beta$ poiché altrimenti, essendo T una teoria di Henkin, si avrebbe $T \vdash_{\mathcal{PL}} \exists x\neg\beta \to [c/x]\neg\beta$ per un opportuno simbolo di costante c di $\tilde{\Sigma}$ e, per modus ponens, $T \vdash_{\mathcal{PL}} [c/x]\neg\beta$ ovvero $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg[c/x]\beta$ ovvero ancora, per ipotesi induttiva, $\neg[c/x]\beta \in T$, assurdo poiché abbiamo già mostrato che si ha $[c/x]\beta \in T$ e per il punto ii della proposizione 3.16; quindi $T \nvdash_{\mathcal{PL}} \exists x\neg\beta$ e, poiché T è una teoria, $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\exists x\neg\beta$, ovvero $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\neg\forall x\neg\neg\beta$; per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.6 si ha quindi $T \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\neg\neg\beta$ e per l'assioma $SPEC$: $T \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\neg\neg\beta$ con y non presente né in β né in T; per l'estensione a $\mathcal{PL}$ della proposizione 3.6 si ha $T \vdash_{\mathcal{PL}} [y/x]\beta$ e infine, per la proposizione 4.8: $T \vdash_{\mathcal{PL}} \forall x\beta$, ovvero $\forall x\beta \in T$, poiché T è una teoria.

  ($\Leftarrow$) Sia $\forall x\beta \in T$; per l'assioma $SPEC$ si ha quindi $\forall x\beta \to [t/x]\beta$ per ogni $t \in Term_{\tilde{\Sigma}}$ e, poiché T è una teoria, $[t/x]\beta \in T$ per ogni $t \in Term_{\tilde{\Sigma}}$; per ipotesi induttiva, da $[t/x]\beta \in T$ segue $[\![[t/x]\beta]\!]\rho = 1$ per cui, per il lemma di sostituzione, $[\![\beta]\!]\rho^{[\![t]\!]\rho}_x = 1$ per ogni $t \in Term_{\tilde{\Sigma}}$; quindi $[\![\forall x\beta]\!]\rho = 1$, poiché, al variare di t, $[\![t]\!]\rho$ "percorre" tutto $|\mathcal{A}_{\Sigma}|$.

□

Teorema 4.4 (di completezza) *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_{\Sigma}$ e $\alpha \in Fbf_{\Sigma}$; si ha che:*

$$\boxed{\textit{se } \Gamma \models \alpha \textit{ allora } \Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha}$$

Dimostrazione: se per assurdo si avesse $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$, per il punto iii della proposizione 4.9 l'insieme di fbf $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ sarebbe consistente e, per il lemma di soddisfacibilità, anche soddisfacibile: esisterebbero $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tali che $[\![\Gamma]\!]^{\mathcal{A}_\Sigma}_\rho = 1$ e $[\![\neg\alpha]\!]^{\mathcal{A}_\Sigma}_\rho = 1$, cioè $[\![\alpha]\!]^{\mathcal{A}_\Sigma}_\rho = 0$; ma questo è assurdo poiché $\Gamma \models \alpha$. $\Box$

Teorema 4.5 (di compattezza) *Sia $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$; Γ è soddisfacibile se e solo se ogni $\Delta \subseteq \Gamma$ di cardinalità finita è soddisfacibile.*
Dimostrazione: dimostriamo, per contrapposizione, che Γ non è soddisfacibile se e solo se esiste $\Delta \subseteq \Gamma$ di cardinalità finita e non soddisfacibile:
($\Leftarrow$) Ovvio.
($\Rightarrow$) Per il lemma di soddisfacibilità, Γ è inconsistente e quindi esiste $\alpha \in Fbf_\Sigma$ tale che $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$; ma allora, per la proposizione 2.2, esiste $\Delta \subseteq \Gamma$ di cardinalità finita tale che $\Delta \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $\Delta \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$; per correttezza $\Delta \models \alpha$ e $\Delta \models \neg\alpha$; quindi Δ non è soddisfacibile, poiché altrimenti esisterebbero $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tali che $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ e $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$, assurdo. $\Box$

Osservazione: consideriamo $\Gamma = \{x > 0\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{x \leq \frac{1}{n}\}$; ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile (ad esempio in $\mathbb{R}$) e ciò nonostante Γ sembrerebbe essere non soddisfacibile, come invece vorrebbe il teorema di compattezza. In effetti l'impressione è errata, poiché il teorema di compattezza ci assicura dell'esistenza di un modello di Γ, che non necessariamente sarà un modello ($\mathbb{R}$, in questo caso) di qualche suo sottoinsieme. Da osservazioni come questa nacque il modello non standard dell'analisi si Robinson.

Corollario 4.5 *L'insieme delle fbf valide $T = \{\alpha | \models \alpha\}$ è ricorsivamente enumerabile.*
Dimostrazione: grazie ai teoremi di correttezza e completezza, un algoritmo ovvio è quello di cominciare dagli assiomi base e di applicare in tutti i modi possibili la regola del modus ponens; quindi riapplico il procedimento *allungando* gli assiomi. $\Box$

Osservazione: T è anche ricorsivo? Vedremo in seguito di no.

4.5 I tableaux per predicati

Definizione 4.21 *Un tableau per predicati è un tableau etichettato con fbf di $\mathcal{PL}$ e costruito tramite le regole dei tableaux proposizionali estese a $\mathcal{PL}$ o tramite le seguenti regole aggiuntive:*

- $\forall$: *se $t \in Term_\Sigma$:*

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x \alpha \\ [t/x]\alpha \end{array}$$

- $\neg\forall$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\forall x \alpha \\ \neg[y/x]\alpha \end{array}$$

con y non libera in nessuna fbf del ramo utilizzata per dedurre α

Possiamo introdurre inoltre le seguenti regole derivate:

- $\exists$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \exists x\alpha \\ [y/x]\alpha \\ \textit{con } y \textit{ non libera} \\ \textit{in nessuna fbf del ramo} \\ \textit{utilizzata per dedurre } \alpha \end{array} \qquad \textit{poiché:} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \exists x\alpha \equiv \neg\forall x\neg\alpha \\ \textit{(applico la regola } \neg\forall\textit{)} \\ \neg[y/x]\neg\alpha \equiv \neg\neg[y/x]\alpha \\ \textit{(applico la regola } \neg\neg\textit{)} \\ [y/x]\alpha \\ \textit{con } y \textit{ non libera} \\ \textit{in nessuna fbf del ramo} \\ \textit{utilizzata per dedurre } \alpha \end{array}$$

- $\neg\exists$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\exists x\alpha \\ \neg[t/x]\alpha \end{array} \qquad \textit{poiché:} \qquad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg\exists x\alpha \equiv \neg\neg\forall x\neg\alpha \\ \textit{(applico la regola } \neg\neg\textit{)} \\ \forall x\neg\alpha \\ \textit{(applico la regola } \forall\textit{)} \\ \neg[t/x]\alpha \end{array}$$

Lemma 4.6 *Sia $\mathcal{A}_\Sigma$ una struttura; se $\mathcal{A}_\Sigma$ soddisfa tutte le fbf di un ramo di un tableau per predicati, allora $\mathcal{A}_\Sigma$ soddisfa tutte le fbf di almeno uno dei rami ottenuti estendendo tale ramo tramite una qualsiasi delle precedenti regole.*
Dimostrazione: consideriamo le varie regole:

- $\neg\neg$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg\alpha \\ \alpha \end{array}$$

  si ha: $1 = [\![\neg\neg\alpha]\!]\rho = 1 - (1 - [\![\alpha]\!]\rho)$ e quindi $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ per un opportuno ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$;

- $\rightarrow$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \alpha \rightarrow \beta \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \neg\alpha & & \beta \end{tikzcd}$$

  si ha: $1 = [\![\alpha \rightarrow \beta]\!]\rho$ per un opportuno ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, per cui da $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ segue $[\![\beta]\!]\rho = 1$; quindi, se $[\![\alpha]\!]\rho = 0$ allora $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$ e se $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ allora $[\![\beta]\!]\rho = 1$;

- $\neg$:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg(\alpha \rightarrow \beta) \\ \alpha, \neg\beta \end{array}$$

  si ha: $1 = [\![\neg(\alpha \rightarrow \beta)]\!]\rho$ per un opportuno ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$, per cui $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]\rho = 0$, ovvero $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ e $[\![\beta]\!]\rho = 0$, ovvero $[\![\alpha]\!]\rho = 1$ e $[\![\neg\beta]\!]\rho = 1$;

- $\forall$:

$$\begin{array}{c}\forall x\alpha \\ [t/x]\alpha\end{array}$$

si ha: $\mathcal{A} \models \forall x\alpha$, ovvero esiste $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che per ogni $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ si abbia $[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 1$; quindi $[\![[t/x]\alpha]\!]\rho =$ (per il lemma di sostituzione) $[\![\alpha]\!]\rho_x^{[\![t]\!]\rho} = 1$;

- $\neg\forall$:

$$\begin{array}{c}\vdots \\ \neg\forall x\alpha \\ \neg[y/x]\alpha \\ \text{con } y \text{ non libera in nessuna fbf del ramo} \\ \text{utilizzata per dedurre } \alpha\end{array}$$

si ha: $\mathcal{A} \models \neg\forall x\alpha$ per cui esiste $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che $[\![\neg\forall x\alpha]\!]\rho = 1$, ovvero $[\![\forall x\alpha]\!]\rho = 0$, ovvero ancora esiste $a \in |\mathcal{A}_\Sigma|$ tale che si abbia $[\![\alpha]\!]\rho_x^a = 0$; devo mostrare che $\mathcal{A} \models \neg[y/x]\alpha$ ovvero che esiste un ambiente $\sigma \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che $[\![\neg[y/x]\alpha]\!]\sigma = 1$ ovvero $[\![[y/x]\alpha]\!]\sigma = 0$, ovvero $[\![\alpha]\!]\sigma_x^{[\![y]\!]\sigma} = 0$; affermo che $\sigma \equiv \rho_y^a$; infatti:

$$[\![\alpha]\!](\rho_y^a)_x^{\sigma(y)} = [\![\alpha]\!](\rho_y^a)_x^a = \begin{cases} [\![\alpha]\!]\rho_x^a = 0 & \text{se } x \equiv y \\ [\![\alpha]\!]\rho_x^a = 0 & \text{se } x \not\equiv y\text{, poiché in tal caso } y \notin FV(\alpha) \text{ e posso sfruttare il lemma di coincidenza} \end{cases}$$

□

Osservazione: si noti come le regole proposizionali conservano la soddisfacibilità nello stesso ambiente che soddisfaceva il ramo non esteso del tableau, mentre nel caso delle regole specifiche del calcolo dei predicati può essere necessario modificare tale ambiente per mantenere la soddisfacibilità. Inoltre le nuove regole dei tableaux per predicati non sono più dirette dalla sintassi. Nascono quindi i primi dubbi sulla decidibilità del problema della soddisfacibilità di una fbf del calcolo dei predicati.

Teorema 4.6 (di correttezza) *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ finito e $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se $\Gamma, \neg\alpha$ è confutabile allora $\Gamma \models \alpha$.*
Dimostrazione: se $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ fosse confutabile ma $\Gamma \not\models \alpha$ allora esisterebbero $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che $[\![\Gamma]\!]\rho = 1$ e $[\![\alpha]\!]\rho = 0$ ovvero $\mathcal{A} \models \Gamma, \neg\alpha$. Per il lemma precedente $\mathcal{A}$ soddisfa allora almeno un ramo della confutazione di $\Gamma, \neg\alpha$. Ciò è assurdo poiché su ogni ramo di una confutazione è presente una qualche fbf e la sua negata. □

Teorema 4.7 (di eliminazione) *Data una refutazione per il calcolo dei predicati che utilizza la regola EM, esiste una refutazione per il calcolo dei predicati che non utilizza la regola EM.*
Dimostrazione: omessa. □

Teorema 4.8 (di completezza) *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ finito e $\alpha \in Fbf_\Sigma$; se $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ allora $\Gamma, \neg\alpha$ è confutabile.*
Dimostrazione: per induzione sulla derivazione $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ di $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$:

- $n = 1$:

– α è un assioma proposizionale: come in $\mathcal{P}_0$ (teorema 3.9);

– $\alpha \equiv \beta \to \forall x\beta$ con $x \notin FV(\beta)$:

$$\Gamma, \neg\alpha$$
(applico la regola $\to$)
$$\beta, \neg\forall x\beta$$
(applico la regola $\neg\forall$)
$$\neg[y/x]\beta \equiv \neg\beta$$
con y non libera in nessuna fbf del ramo utilizzata per dedurre β
$$\odot$$

– $\alpha \equiv \forall x\beta \to [t/x]\beta$:

$$\Gamma, \neg\alpha$$
(applico la regola $\to$)
$$\forall x\beta, \neg[t/x]\beta$$
(applico la regola $\forall$)
$$[t/x]\beta$$
$$\odot$$

– $\alpha \equiv (\forall x(\beta \to \gamma)) \to (\forall x\beta \to \forall x\gamma)$:

$$\Gamma, \neg\alpha$$
(applico la regola $\neg \to$)
$$\forall x(\beta \to \gamma), \neg(\forall x\beta \to \forall x\gamma)$$
(applico la regola $\neg \to$)
$$\forall x\beta, \neg\forall x\gamma$$
(applico la regola $\neg\forall$)
$$\neg[y/x]\gamma$$
con y non libera in nessuna fbf del ramo utilizzata per dedurre γ
(applico la regola $\forall$)
$$[y/x]\beta$$
(applico la regola $\forall$)
$$[y/x](\beta \to \gamma) \equiv ([y/x]\beta \to [y/x]\gamma)$$
(applico la regola $\to$)

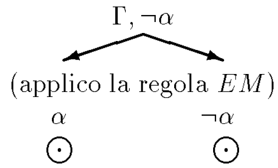
$$\begin{array}{ccc} & \swarrow \quad \searrow & \\ \neg[y/x]\beta & & [y/x]\gamma \\ \odot & & \odot \end{array}$$

– $\alpha \equiv \forall x_1 \ldots \forall x_k\beta$ con β uno dei precedenti assiomi:

$$\Gamma, \neg\alpha$$
(applico la regola $\neg\forall$)
$$\neg[x_1/x_1]\forall x_2 \ldots \forall x_k\beta$$
poiché x_1 è libera in $\neg\alpha$
$$\vdots$$
(iterate applicazioni della regola $\neg\forall$)
$$\vdots$$
$$\neg[x_k/x_k] \ldots [x_1/x_1]\beta \equiv \neg\beta$$
(inserisco l'abero di confutazione di $\neg\beta$)

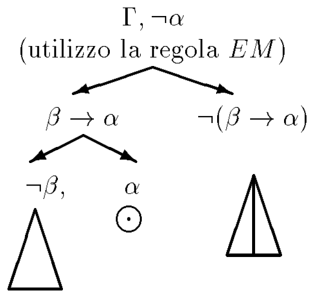
$$\odot$$

  - $\alpha \in \Gamma$:



La tesi segue grazie al teorema di eliminazione;

- $n > 1$: α è ottenuto per modus ponens: $\frac{\beta \to \alpha \quad \beta}{\alpha}$: poiché $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \beta \to \alpha$ e $\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \beta$, per ipotesi induttiva so che $\Gamma, \neg(\beta \to \alpha)$ e $\Gamma, \neg\beta$ sono confutabili; ma allora so costruire una confutazione di $\Gamma, \neg\alpha$:



□

Teorema 4.9 *Siano $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ finito e $\alpha \in Fbf_\Sigma$; si ha che:*

$$\boxed{\Gamma \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha \textit{ se e solo se } \Gamma \models \alpha \textit{ se e solo se } \Gamma, \neg\alpha \textit{ è confutabile}}$$

Dimostrazione: direttamente dalla correttezza e completezza di $\mathcal{PL}$ e dai teoremi 4.6 e 4.8. □

Capitolo 5

Elementi di teoria dei modelli

Osservazione: i seguenti risultati pongono un limite alla *potenza* del calcolo dei predicati che, dopo i risultati di correttezza e completezza, sembrava illimitata.

5.1 I teoremi di Skölem

Teorema 5.1 *Se $\Gamma \subseteq Fbf_\Sigma$ ha modelli finiti di cardinalità arbitrariamente elevata, Γ ha almeno un modello infinito.*
Dimostrazione: definiamo le seguenti fbf:

$$\lambda_2 \equiv \exists x_1 \exists x_2 x_1 \neq x_2$$
$$\lambda_3 \equiv \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge x_2 \neq x_3$$
$$\vdots$$
$$\lambda_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j, 1 \leq i,j \leq n} x_i \neq x_j \qquad \text{per ogni } n \geq 4.$$

Osserviamo che:

i. le λ_n sono chiuse, per cui ogni λ_n è soddisfacibile in una data struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ se e solo se è vera in $\mathcal{A}_\Sigma$ (corollario 4.1);

ii. data una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$, $\mathcal{A}_\Sigma \models \lambda_n$ se e solo se $|\mathcal{A}_\Sigma|$ ha almeno n elementi:

   ($\Rightarrow$) sia $\mathcal{A}_\Sigma$ tale che $\mathcal{A}_\Sigma \models \lambda_n$, con $n \geq 2$; se $|\mathcal{A}_\Sigma|$ avesse meno di n elementi, esisterebbero i e j, $1 \leq i, j \leq n$, tali che $[\![x_i]\!]\rho = [\![x_j]\!]\rho$ per un opportuno ambiente $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$; ma allora $[\![x_i \neq x_j]\!]\rho = 0$, assurdo;

   ($\Leftarrow$) basta scegliere $x_1, \dots, x_n$ coincidenti con i primi n elementi di $|\mathcal{A}_\Sigma|$;

iii. data una struttura $\mathcal{A}_\Sigma$, da $\mathcal{A}_\Sigma \models \lambda_n$ segue $\mathcal{A}_\Sigma \models \lambda_i$ per ogni $1 \leq i \leq n$.

Consideriamo adesso $\Gamma^\infty = \Gamma \cup \{\lambda_n | n \in \mathbb{N}\}$; Γ^∞ è soddisfacibile: infatti, grazie al teorema di compattezza, basta mostrare che, dato $\Delta \subseteq \Gamma^\infty$ finito, esso è soddisfacibile; a tal fine, sia $m = \max\{n \in \mathbb{N} | \lambda_n \in \Delta\}$; poiché Γ ammette modelli di cardinalità arbitraria, e grazie alla proprietà ii, esiste un modello $\mathcal{A}_\Sigma$ tale che $\mathcal{A}_\Sigma \models \Gamma \cup \{\lambda_n\}$; grazie alla proprietà iii, $\mathcal{A}_\Sigma \models \Delta$ e quindi Δ è soddisfacibile. Se Γ^∞ è soddisfacibile, esso avrà un modello infinito; poiché ogni suo modello è un modello di tutte le fbf λ_i e per la proprietà ii, tale modello ha un numero arbitrariamente grande di elementi. Ma $\Gamma \subseteq \Gamma^\infty$, per cui esso è un modello infinito di Γ. □

Corollario 5.1 *Non esiste una teoria i cui modelli siano tutti e soli gli insiemi finiti (la finitezza non è un concetto del primo ordine).*
Dimostrazione: direttamente dal teorema precedente. □

Teorema 5.2 (debole di Löwenheim–Skölem) *Se $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è una teoria che ha un modello infinito allora ha anche un modello numerabile.*
Dimostrazione: T è soddisfacibile e quindi (corollario 4.4) consistente; quindi possiamo costruire un modello di T come nella dimostrazione del lemma di soddisfacibilità: tale modello ha cardinalità numerabile. □

Osservazione: di conseguenza, se sapessimo scrivere una teoria R per i numeri reali che ammetta, come ci aspettiamo, un modello infinito, concluderemmo che essa ammette anche un modello numerabile!

Definizione 5.1 *Definiamo le cardinalità infinite come segue:*

- $\aleph_0$ *è la cardinalità del numerabile* ($\mathbb{N}$)*;*
- $\aleph_1$ *è la cardinalità dei sottoinsiemi di* $\mathbb{N}$*;*
- $\aleph_2$ *è la cardinalità dei sottoinsiemi dei sottoinsiemi di* $\mathbb{N}$*;*
- *e così via.*

Teorema 5.3 (di Löwenheim–Skölem all'insù) *Se $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è una teoria che ha un modello di cardinalità infinita k, essa ha anche un modello di cardinalità infinita λ, per $\lambda \geq k$.*
Dimostrazione: omessa. □

Teorema 5.4 (di Löwenheim–Skölem all'ingiù) *Se $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è una teoria che ha un modello di cardinalità infinita k, essa ha anche un modello di cardinalità infinita λ, per $\aleph_0 \leq \lambda \leq k$.*
Dimostrazione: omessa. □

Osservazione: esistono teorie che ammettono solo modelli finiti (e in numero infinito): scegliendo ad esempio la segnatura $\Sigma =< c^0; \emptyset >$ e la teoria $T = Con(\{\forall x(x = c)\})$ in Fbf_Σ, tutti i modelli di tale teoria avranno cardinalità unitaria (e saranno in numero infinito).

5.2 Immersioni

Definizione 5.2 *Sia Σ una segnatura priva di simboli di funzione tranne che dei simboli di costante e siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due strutture per Σ. Una immersione di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ è una funzione iniettiva $f : |\mathcal{A}| \longmapsto |\mathcal{B}|$ tale che:*

1. $f(\tilde{c}_i^{\mathcal{A}}) = \tilde{c}_i^{\mathcal{B}}$ *per ogni simbolo di costante c_i di Σ (f è biiettiva sulle valutazioni delle costanti);*
2. $\tilde{P}_i^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = 1$ *se e solo se* $\tilde{P}_i^{\mathcal{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = 1$ *per ogni simbolo di predicato P_i di Σ e per ogni $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{A}|$.*

Scriveremo allora: $\mathcal{A} \overset{\mathrm{f}}{\hookrightarrow} \mathcal{B}$.

$\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono dette isomorfe se e solo se esiste un'immersione surgettiva di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$; scriveremo in tal caso: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Definizione 5.3 *Una teoria $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è detta essere categorica se e solo se tutti i suoi modelli sono isomorfi.*

Proposizione 5.1 *Se una teoria $T \subseteq Fbf_\Sigma$ ha un modello infinito, allora non è categorica.*
Dimostrazione: direttamente dal teorema di Löwenheim–Skölem all'insù. □

Esempio: scelta $\Sigma =< \{c_1^0, c_2^0\}; \emptyset >$ la teoria:

$$T = Con(\{c_1 \neq c_2, \forall x(x = c_1 \vee x = c_2)\})$$

è categorica; infatti tutti i suoi modelli hanno cardinalità pari a due.

Definizione 5.4 *Sia k un numero cardinale; una teoria $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è detta essere k–categorica se e solo se tutti i suoi modelli di cardinalità infinita k sono isomorfi.*

Esempio: consideriamo il calcolo dei predicati su una segnatura priva di simboli di funzione (e quindi anche di costante) e di simboli di predicato. Sia $T = \{\alpha \in Fbf_\Sigma | \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha\}$ una teoria; T è k–categorica per ogni cardinale k; infatti una qualsiasi biiezione fra due qualsiasi suoi modelli è un'immersione fra tali modelli.
Esempio: sia $\Sigma =< \emptyset; P^1 >$; definiamo su tale segnatura le seguenti fbf:

$\sigma_1 \equiv (\exists x_1 P(x_1)) \wedge (\exists y_1 \neg P(y_1))$

$\sigma_2 \equiv (\exists x_1 \exists x_2 x_1 \neq x_2 \wedge P(x_1) \wedge P(x_2)) \wedge$
$\quad (\exists y_1 \exists y_2 y_1 \neq y_2 \wedge \neg P(y_1) \wedge \neg P(y_2))$

$\vdots$

$\sigma_m \equiv$ esistono m elementi che soddisfano P ed m che soddisfano $\neg P$.

Sia $T = Con(\{\sigma_m | m \in \mathbb{N}\})$ una teoria e sia $k = \aleph_0$; siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due modelli di T (si noti che T ammette modelli di qualsiasi cardinalità infinita); poiché:

$$|\{a \in |\mathcal{A}| \text{ tali che } \tilde{P}^{\mathcal{A}}(a) = 1\}| = |\{b \in |\mathcal{B}| \text{ tali che } \tilde{P}^{\mathcal{B}}(b) = 1\}| = \aleph_0,$$

T è $\aleph_0$–categorica; se invece $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ avessero cardinalità uguale ma superiore ad $\aleph_0$, potrei scegliere i su citati insiemi in modo tale che abbiano cardinalità diversa; quindi T non è $\aleph_k$–categorica per $k > 0$.
Esempio: sia $\Sigma =< \{\{c_i\}_{i \in \mathbb{N}}; \emptyset\} >$; consideriamo su tale segnatura la teoria $T = Con(\{c_i \neq c_j | i \neq j\})$ e due suoi modelli $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ di cardinalità $\aleph_0$ (si noti che T ammette modelli di qualsiasi cardinalità infinita); se scelgo $|\mathcal{A}| = \{\tilde{c}_i^{\mathcal{A}} | i \in \mathbb{N}\}$ e $|\mathcal{B}| = \{\tilde{c}_i^{\mathcal{B}} | i \in \mathbb{N}\} \cup \{d\}$ con $d \neq c_i^{\mathcal{B}}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, qualsiasi funzione iniettiva $f : |\mathcal{A}| \longmapsto |\mathcal{B}|$ non potrà mai essere una immersione surgettiva: se lo fosse, infatti, d dovrebbe avere una controimmagine in $|\mathcal{A}|$: $f^{-1}(d) = \tilde{c}_k^{\mathcal{A}}$ per un opportuno intero k, per cui $f(f^{-1}(d)) = \tilde{c}_k^{\mathcal{B}}$, il che è assurdo poiché $f(f^{-1}(d)) = d$ e $d \neq \tilde{c}_h^{\mathcal{B}}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$; quindi T non è $\aleph_0$–categorica. Se invece $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno cardinalità infinita superiore ad $\aleph_0$, posso estendere una bigezione esistente fra $\{\tilde{c}_i^{\mathcal{A}} | i \in \mathbb{N}\}$ e $\{\tilde{c}_i^{\mathcal{B}} | i \in \mathbb{N}\}$, che scelgo di cardinalità uguale, ad una bigezione fra il *resto* di $|\mathcal{A}|$ e il *resto* di $|\mathcal{B}|$ (che hanno cardinalità uguale e quindi ammettono una bigezione), ottenendo una immersione bigettiva di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$; quindi T è $\aleph_k$–categorica per $k > 0$.
Osservazione: quindi esistono teorie $\aleph_0$–categoriche ma non $\aleph_k$–categoriche per $k > 0$ e viceversa; ci si può chiedere se esistano teorie che siano $\aleph_k$–categoriche solo per un $k > 0$; a questa domanda risponde (negativamente) il seguente teorema.

Teorema 5.5 (di Morley) *Se $T \subseteq Fbf_\Sigma$ è una teoria k-categorica per k infinito e maggiore di $\aleph_0$ allora T è k–categorica per ogni $h \geq k$.*
Dimostrazione: molto *profonda* (e omessa). □

Osservazione: il concetto di categoricità sembra troppo forte poiché richiede delle caratteristiche dei modelli che non riguardano la teoria (si veda l'ultimo esempio); cerchiamo quindi delle proprietà più deboli che due modelli devono possedere per essere *equivalenti*.

Definizione 5.5 *Sia T una teoria composta solo da fbf chiuse (si noti che da fbf chiuse non si possono dedurre fbf aperte); siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due modelli di T; essi sono detti essere elementarmente equivalenti (o equivalenti al prim'ordine) se e solo se per ogni fbf chiusa $\alpha \in Fbf_\Sigma$ si ha: $\mathcal{A} \models \alpha$ se e solo se $\mathcal{B} \models \beta$.*

Definizione 5.6 *Sia $T \subseteq Fbf_\Sigma$ una teoria composta solo da fbf chiuse; essa è detta essere completa se e solo se per ogni $\alpha \in Fbf_\Sigma$ chiusa si ha: $T \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ oppure $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$.*

Teorema 5.6 *Sia $T \subseteq Fbf_\Sigma$ una teoria formata solo da fbf chiuse; le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i. T è completa;

ii. per ogni struttura $\mathcal{A}_\Sigma$ tale che $\mathcal{A}_\Sigma \models T$ si ha $Th(\mathcal{A}_\Sigma) = T$;

iii. ogni coppia di modelli $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{B}_\Sigma$ di T è tale che $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{B}_\Sigma$ sono elementarmente equivalenti.

Dimostrazione:

i⇒ii Osserviamo innanzitutto che $Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ è una teoria: da $Th(\mathcal{A}_\Sigma) \vdash_{\mathcal{PL}} \beta$ segue per correttezza $Th(\mathcal{A}_\Sigma) \models \beta$ ovvero per ogni struttura $\mathcal{B}$ e ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{B}}$ da $[\![Th(\mathcal{A}_\Sigma)]\!]\rho = 1$ segue $[\![\beta]\!]\rho = 1$; ma allora dal fatto che $\mathcal{A}_\Sigma \models Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ segue che per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![Th(\mathcal{A}_\Sigma)]\!]\rho = 1$, ovvero per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si ha $[\![\beta]\!]\rho = 1$, cioè $\mathcal{A}_\Sigma \models \beta$ e quindi $\beta \in Th(\mathcal{A}_\Sigma)$.

Sia allora $\mathcal{A}_\Sigma$ un modello di T: da $\mathcal{A}_\Sigma \models T$ segue $T \subseteq Th(\mathcal{A}_\Sigma)$; basta quindi mostrare che $Th(\mathcal{A}_\Sigma) \subseteq T$ ovvero che da $\alpha \in Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ segue $\alpha \in T$, ovvero ancora che da $\alpha \notin T$ segue $\alpha \notin Th(\mathcal{A}_\Sigma)$. Ma da $\alpha \notin T$ segue, poiché T è una teoria, $T \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ ovvero, poiché T è completa, $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$; quindi da $Th(\mathcal{A}_\Sigma) \vdash_{\mathcal{PL}} T$ e $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$ segue $Th(\mathcal{A}_\Sigma) \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$ e, poiché $Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ è una teoria, $\neg\alpha \in Th(\mathcal{A}_\Sigma)$; se fosse $\alpha \in Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ allora $Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ sarebbe inconsistente, mentre sappiamo che $\mathcal{A}_\Sigma \models Th(\mathcal{A}_\Sigma)$; quindi deve essere $\alpha \notin Th(\mathcal{A}_\Sigma)$, come volevamo dimostrare.

ii⇒iii Sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$ chiusa; si ha: $\mathcal{A}_\Sigma \models \alpha$ se e solo se, per definizione, $\alpha \in Th(\mathcal{A}_\Sigma)$ se e solo se, per ipotesi, $\alpha \in T$ se e solo se, sempre per ipotesi, $\alpha \in Th(\mathcal{B}_\Sigma)$ se e solo se, per definizione, $\mathcal{B}_\Sigma \models \alpha$.

iii⇒i Sia $\alpha \in Fbf_\Sigma$ chiusa; se $\alpha \in T$ allora $T \vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$; se invece $\alpha \notin T$ allora, poiché T è una teoria, si avrà $T \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$; voglio mostrare che in tal caso $T \vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$; per completezza basta mostrare che $T \models \neg\alpha$, ovvero che per ogni $\mathcal{A}_\Sigma$ e per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ da $[\![T]\!]\rho = 1$ segue $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$, ovvero ancora, poiché $\neg\alpha$ è chiusa e T è formata da fbf chiuse, che per ogni $\mathcal{A}_\Sigma$ esiste $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che da $[\![T]\!]\rho = 1$ segue $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$. Se $\mathcal{A}_\Sigma \not\models T$ allora esiste $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ tale che $[\![T]\!]\rho \neq 1$ e quindi, in tale ambiente, la precedente implicazione è vera. Se invece $\mathcal{A}_\Sigma \models T$, si consideri $\mathcal{B}_\Sigma$ tale che $\mathcal{B}_\Sigma \models T \cup \{\neg\alpha\}$ (esiste certamente poiché $T \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ implica che $T \cup \{\neg\alpha\}$ è consistente e quindi soddisfacibile); $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{B}_\Sigma$ sono per ipotesi elementarmente equivalenti per cui da $\mathcal{B}_\Sigma \models \neg\alpha$ segue $\mathcal{A}_\Sigma \models \neg\alpha$; preso un qualsiasi $\rho \in ENV^{\mathcal{A}_\Sigma}$ si avrà quindi, poiché $\neg\alpha$ è chiusa: $[\![\neg\alpha]\!]\rho = 1$.

□

Teorema 5.7 (test di Łos-Vaught) *Sia $T \subseteq Fbf_\Sigma$ una teoria consistente priva di modelli finiti e formata solo da fbf chiuse; se T è k–categorica per qualche k infinito, allora T è completa.*

Dimostrazione: se per assurdo T non fosse completa, esisterebbe $\alpha \in Fbf_\Sigma$ chiusa tale che $T \not\vdash_{\mathcal{PL}} \alpha$ e $T \not\vdash_{\mathcal{PL}} \neg\alpha$; quindi $T \cup \{\neg\alpha\}$ e $T \cup \{\neg\neg\alpha\}$ sono consistenti e soddisfacibili: esistono $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{B}_\Sigma$ tali che $\mathcal{A}_\Sigma \models T \cup \{\neg\alpha\}$ e $\mathcal{B}_\Sigma \models T \cup \{\neg\neg\alpha\}$, ovvero $\mathcal{B}_\Sigma \models T \cup \{\alpha\}$. Poiché $\mathcal{A}_\Sigma$ e $\mathcal{B}_\Sigma$ sono in particolare modelli di T, essi non possono che avere cardinalità infinita e, per i teoremi di Löwenheim–Skölem, esistono due modelli di $T \cup \{\neg\alpha\}$ e di $T \cup \{\alpha\}$ che hanno cardinalità $\aleph_k$ e che indichiamo rispettivamente con $\mathcal{C}_\Sigma$ e $\mathcal{D}_\Sigma$. Poiché $\mathcal{C}_\Sigma$ e $\mathcal{D}_\Sigma$ sono anche modelli di T, che è k–categorico, si avrà $\mathcal{C}_\Sigma \cong \mathcal{D}_\Sigma$; ma allora la valutazione di α deve essere la stessa sia in $\mathcal{C}_\Sigma$ che in $\mathcal{D}_\Sigma$ poiché tale valutazione, essendo α chiusa, dipende solo dall'interpretazione delle costanti e dei predicati; ma da $\mathcal{C}_\Sigma \models \neg\alpha$ e $\mathcal{D}_\Sigma \models \alpha$ segue che per ogni $\rho \in ENV^{\mathcal{C}_\Sigma}$ si ha $[\![\alpha]\!]\rho = 0$ e che per ogni $\sigma \in ENV^{\mathcal{D}_\Sigma}$ si ha $[\![\alpha]\!]\sigma = 1$, il che è assurdo. $\square$

Esempio: (UDO: Unlimited Dense Order): su $\Sigma = \{\emptyset, \leq^2\}$ definiamo T come l'insieme delle conseguenze delle seguenti fbf chiuse:

$$\left.\begin{array}{l} \forall x.x \leq x \\ \forall x \forall y.x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x = y \\ \forall x \forall y \forall z.x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z \end{array}\right\} \text{(relazioni di ordinamento)}$$

$\forall x \forall y.x \leq y \vee y \leq x$ (ordinamento totale o lineare)

$\forall x \forall y(x \leq y \wedge x \neq y \rightarrow \exists z.x \neq z \wedge y \neq z \wedge x \leq z \wedge z \leq y)$ (ordine denso)

$\forall x \exists y \exists z.y \neq x \wedge z \neq x \wedge y \leq x \wedge x \leq z$ (ordine illimitato).

T è per definizione una teoria formata da fbf chiuse; inoltre è consistente, poiché, ad esempio, $\mathbb{R} \models T$, e non ha modelli finiti, a causa degli assiomi che la definiscono.

Proposizione 5.2 (proprietà di Cantor) *UDO è $\aleph_0$–categorica.*
Dimostrazione: omessa. $\square$

Corollario 5.2 *UDO è completa.*
Dimostrazione: tramite il test di Los–Vaught. $\square$

Osservazione: quindi due modelli di UDO, come $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$, sono elementarmente equivalenti: al prim'ordine $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ non sono distinguibili nel linguaggio UDO.

Capitolo 6

Introduzione al λ–calcolo non tipato

6.1 Motivazioni storiche

Il λ–calcolo è un sistema formale introdotto negli anni '30 da A. Church (e sviluppato particolarmente da H. Curry) che, in parallelo con la teoria dei combinatori, si proponeva come mezzo per esprimere in modo versatile le funzioni e la relativa combinazione.

Per sua natura, il λ–calcolo può essere visto come un linguaggio hi-level — hi-order (linguaggi come il LISP ne ricalcano infatti la struttura) che nonostante la sua semplicità dispone, almeno nella sua versione non tipata, della stessa potenza espressiva delle Macchine di Turing: è proprio tramite il λ–calcolo che si sono ottenuti i primi risultati di non-calcolabilità.

Questa ricchezza espressiva aveva spinto gli autori a tentare una operazione fondazionale della matematica tramite il λ–calcolo ma risultati di indecidibilità (es. paradosso di Rosser), anche se in parte aggirati da successivi lavori, vanificano questo ambizioso progetto pur non mettendo in discussione il valore del λ–calcolo nella teoria delle funzioni.

Per quanto esposto e per la notazione usata nel seguito facciamo riferimento a:

- H.P.Barendregt 'The Lambda Calculus, its syntax and semantics'.
- J.R.Hindley & J.P.Seldin 'Introduction to combinators and λ–Calculus'.
- S.Martini: lezioni del corso di Logica Matematica aa 1994/5 presso il dipartimento di Informatica dell'Università di Pisa.

6.2 Definizione del λ–calcolo

I mattoni fondamentali del λ–calcolo sono i λ–termini: l'attenzione è posta nelle relazioni tra loro intercorrenti e nelle trasformazioni che possono subire.

Definizione 6.1 (λ–termini) *Dato un insieme V infinito di simboli detti* variabili *e un insieme C (finito, infinito o vuoto) di simboli detti costanti abbiamo che*

- *tutte le variabili e tutte le costanti sono λ–termini* (atomi)
- *se M ed N sono λ–termini allora (MN) è un λ–termine* (applicazione)

- *se M é un λ–termine e x una variabile allora $(\lambda x.M)$ é un λ–termine (astrazione)*

Osservazioni:

1. se C é vuoto parliamo di λ–calcolo puro altrimenti di λ–calcolo applicato;
2. quando si omettono le parentesi () si presuppone l'associatività a sinistra ossia $MNPQ \equiv (((MN)P)Q)$;
3. il simbolo $\equiv$ indica l'identità sintattica tra λ–termini;
4. l'astrazione associa e destra ossia $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.M \equiv (\lambda x_1(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots))$.

Utilizzeremo la seguente notazione:

- $\overline{x} \equiv x_1, \ldots, x_n$
- $\lambda\overline{x}.M \equiv \lambda x_1(\ldots(\lambda x_n.M)\ldots)$ associa a destra;
- $M\overline{N} \equiv (\ldots((MN_1)N_2)\ldots)N_n$ associa a sinistra.

l'applicazione può anche essere rappresentata con la notazione classica ossia $MN \equiv M(N)$.

Definizione 6.2 (lunghezza) *La lunghezza di un λ–termine, $lgh(M)$, è data dal numero di occorrenze di atomi in M, ossia:*

- $lgh(a) = 1$ *se a è un atomo;*
- $lgh(MN) = lgh(M) + lgh(N)$;
- $lgh(\lambda x.M) = 1 + lgh(M)$.

Definizione 6.3 (occorrenza) *La relazione $O \subseteq \{\lambda - term.\}^2$ che leggiamo 'P occorre in Q' o 'P è sottotermine di Q' è espressa ricorsivamente come:*

- *P occorre in P;*
- *P occorre in (MN) sse P occorre in M oppure P occorre in N;*
- *P occorre in $(\lambda x.M)$ sse P occorre in M oppure $P \equiv x$.*

Definizione 6.4 (scope) *Dato il λ–termine $(\lambda x.M)$ diciamo che M è lo scope (la portata) del legatore λ per x.*

Una occorrenza di una variabile x in P si dice *legata* se compare in un sottotermine di P della forma $(\lambda x.M)$ e si dice *libera* altrimenti; una variabile x è detta *libera in* P se ha almeno una occorrenza libera in P e lo indichiamo con $x \in FV(P)$.

Un λ–termine è detto *chiuso* se e solo se non ci sono variabili che occorrono libere in esso.

Particolarmente importante è la definizione di 'sostituzione' di un λ–termine N nelle occorrenze libere di una variabile x in un λ–termine della forma $(\lambda x.M)$ poiché bisogna considerare la necessità di una ridenominazione di variabili libere di N che diventerebbero legate dopo la sostituzione in M (clash). Questa attenzione riflette la volontà di preservare la modularità semantica dei λ–termini ed il fatto che le variabili rappresentano solo dei buchi da riempire in una struttura e non dei possibili ponti sintattico–semantici con altre strutture: la ridenominazione è dunque un mezzo sintattico per prevenire possibili ambiguità semantiche.

Vedendo il λ–calcolo come un linguaggio di programmazione questa è una ben precisa scelta implementativa che potrebbe a volte risultare scomoda: considerando i λ–termini come oggetti, le variabili libere possono essere viste come parametri per istanziare l'oggetto e vorrei potere produrre astrazioni a run time combinando gli oggetti stessi ma i ponti vengono tagliati dalla ridenominazione.

Esempio:

$$S \equiv \lambda x.xy \text{ ed } M \equiv \lambda z.\lambda y.z \text{ comporta } [S/z]M \equiv \lambda y.\lambda x.xt$$

($[]M$ è definito di seguito) dove perdo il controllo sul parametro y sul quale volevo astrarre poiché viene rimpiazzato da una variabile fresca.

Notiamo comunque che la scelta fatta può portare anche comportamenti interessanti e pertanto l'osservazione precedente è strutturale ma non critica.

Definizione 6.5 (sostituzione) *Dati i λ–termini M, N, x chiamo* sostituzione $[N/x]M$ *il λ–termine ottenuto rimpiazzando le occorrenze libere di x in M con N:*

- $[N/x]x \ \equiv \ N$;
- $[N/x]a \ \equiv \ a$ *(con a atomo diverso da x)*;
- $[N/x](PQ) \ \equiv \ ([N/x]P[N/x]Q)$;
- $[N/x](\lambda x.P) \ \equiv \ (\lambda x.P)$ *nessun effetto*;
- $[N/x](\lambda y.P) \ \equiv \ (\lambda y.[N/x]P)$; *se* $y \not\equiv x$ *e* $(y \notin FV(N)$ *oppure* $x \notin FV(P))$;
- $[N/x](\lambda y.P) \ \equiv \ (\lambda z.[N/x][z/y]P)$ *se* $y \not\equiv x$ *e* $y \in FV(N)$ *e* $x \in FV(P)$ *e* $z \notin FV(NP)$.

Osserviamo che nel caso di sostituzioni multiple si segue l'associatività a destra, per cui $[S_2][S_1]M \equiv [S_2]([S_1]M)$.

Definizione 6.6 *Dato un λ–termine P in cui occorre il λ–termine $(\lambda x.M)$, si dice cambio di variabile legata la sostituzione in P di $(\lambda x.M)$ con $(\lambda y.[y/x]M)$.*

Definizione 6.7 (α–conversione) *Dati due λ–termini P e Q, diciamo che essi sono α–congruenti o che P α–converte in Q se e solo se Q è ottenuto da P con un numero finito (anche nullo) di cambi di variabile legata. Scrivo $P \equiv_\alpha Q$.*

I λ–termini α–congruenti (diremo semplicemente 'congruenti' qualora non ci sia ambiguità) possono essere usati in modo intercambiabile nel λ–calcolo e si può pensare di lavorare direttamente con l'insieme quoziente modulo α–conversione; è immediato provare che $\equiv_\alpha$ è una relazione di equivalenza.

Sfruttando la sostituzione possiamo ora introdurre un altro concetto fondamentale dei sistemi funzionali ossia l'applicazione delle funzioni agli argomenti e valutazione del risultato ottenuto.

A questo livello si propone un 'taglio sintattico' ad una vasta classe di oggetti (λ–termini) che pur essendo sintatticamente corretti sono semanticamente poco interessanti. L'applicazione è stata definita come (MN) con M ed N λ–termini qualunque ma in effetti ci interessano solo quelli in cui M è una astrazione.

Definizione 6.8 *Chiamo β–redex un λ–termine della forma $(\lambda x.M)N$ e 'ridotto' ad esso relativo il λ–termine $[N/x]M$.*

Definizione 6.9 *Dico che P β–riduce in Q se e solo se Q è ottenuto da P con un numero finito (anche nullo) di sostituzioni di β–redex con i relativi ridotti: lo indico con $P \ \trianglerighteq_\beta Q$.*

Osserviamo che una β–riduzione non sempre porta ad una semplificazione del termine; es. sia $\omega = \lambda x.xx$ ed $\Omega = \omega\omega$; è facile convircersi che Ω può solo ridurre a se stesso.

Definizione 6.10 *Un termine in cui non occorrono β–redex è detto essere in forma β–normale.*

Definizione 6.11 *β–nf indica l'insieme di tutti i λ–termini in forma β–normale.*

Definizione 6.12 *Se $P \trianglerighteq_\beta Q$ e $Q \in \beta$-nf diciamo che Q è la forma β–normale di P.*

L'esempio precedente su Ω mostra come non tutti i termini ammettano forma β–normale (diremo semplicemente 'normale' qualora non insorgano ambiguità).

Teorema 6.1 (Church–Rosser per β–riduzioni) *Se $P \trianglerighteq_\beta Q$ e $P \trianglerighteq_\beta N$ allora esiste un termine T tale che $N \trianglerighteq_\beta T$ e $Q \trianglerighteq_\beta T$ (confluenza).*

Dimostrazione: Si procede in modo induttivo provando che ogni singolo passo di β–riduzione porta a termini tra loro β–riducibili e che quindi sono tali anche M ed N ottenuti dopo un numero finito di passi. La cosa è ben visualizzata su una griglia rettangolare divisa in quadrati uguali: otteniamo una rete i cui nodi indicano termini e gli archi indicano singoli passi di riduzione. Per quanto riguarda il passo unitario abbiamo diversi casi (si omettono i casi banali e tutte le riduzioni si intendono di un passo):

- Q ed N sono ottenuti riducendo redex $R1$ ed $R2$ distinti di P: basta ora ridurre $R2$ in Q ed $R1$ in N per ottenere il T comune;
- se Q ed N sono ottenuti lavorando sullo stesso redex $(\lambda x.H)K$ vediamo i diversi sottocasi:
  1. se per ottenere sia Q che N si è lavorato su H (simile per K) si reiterano i casi della dimostrazione su una immagine più dettagliata di H.
  2. se per Q si è lavorato su $R1$ di H e per N si è lavorato su $R2$ di K (o viceversa), T si ottiene lavorando su $R2$ per Q e su $R1$ per N (gli Ri non interferiscono);
  3. Q si ottiene come $[K/x]H$ mentre N si ottiene lavorando su R in H (o K) che diventa H' (K'): il passo fatto per Q non modifica i redex di K ed H pertanto lavorando su R in Q, e riducendo $(\lambda x.H')K$, si ottiene T.

$\square$

Con opportune convenzioni sulle modalità di attuazione della sostituzione alcuni punti diventano ridondanti, ma per ora ci riferiamo alla definizione di sostituzione data in precedenza.

Corollario 6.1 *La forma normale di un termine è unica a meno di congruenza.*

Dimostrazione: riprendendo l'enunciato del teorema, supponiamo per assurdo che Q ed N siano due forme β–normali di P e che $Q \not\equiv_\alpha N$; il teorema garantisce che Q ed N possono essere fatti confluire in T, ma essendo forme normali (senza redex) questo è possibile solo se Q ed N sono già α–equivalenti ossia sono lo stesso oggetto (forma normale), visto che lavoriamo sull'insieme dei λ–termini quozientato rispetto a $\equiv_\alpha$. $\square$

La β–riduzione vista come relazione binaria tra termini non è simmetrica ma dà origine alla relazione di β–uguaglianza che ha notevole impiego.

Definizione 6.13 *Dati due λ–termini P e Q, P è β–*uguale *a Q se e solo se Q si ottiene da P con un numero finito (anche nullo) di*

- *β–riduzioni*
- *β–riduzioni inverse ('disapplicazione' dell'argomento)*
- *cambiamento di variabili legate.*

In altri termini la relazione $=_\beta$ richiede l'esistenza di una successione $P_0, \ldots, P_n$ con $P_0 = P, P_n = Q$ e per ogni $i < n$ deve valere almeno uno dei seguenti casi:

- $P_i \trianglerighteq P_{i+1}$
- $P_{i+1} \trianglerighteq P_i$
- $P_i \equiv_\alpha P_{i+1}$

Osserviamo che $=_\beta$ è una relazione di equivalenza.

Teorema 6.2 (Church–Rosser per $=_\beta$) *Dati due λ–termini P e Q, se $P =_\beta Q$ allore esiste un λ–termine T tale che $P \trianglerighteq_\beta T$ e $Q \trianglerighteq_\beta T$.*

Corollario 6.2 *Conseguenze notevoli sono:*

1. *se $P =_\beta Q$ e Q è in forma normale allora $P \trianglerighteq_\beta Q$;*
2. *se $P =_\beta Q$ allora P e Q hanno la stessa forma normale (o nessuno dei due ammette forma normale);*
3. *se $P =_\beta Q$ e sono entrambi in forma normale allora $P \equiv_\alpha Q$.*

Teorema 6.3 (Decidibilità) *La relazione $=_\beta$ è* non ricorsiva *ossia non esiste una funzione φ totale calcolabile tale che:*

$$\varphi(P,Q) \;=\; \begin{cases} 1 & se\ P =_\beta Q \\ 0 & se\ P \neq_\beta Q \end{cases}$$

6.3 Formalizzazione del λ–Calcolo

Il nostro scopo è quello di costruire un sistema formale λ_β che esprima i concetti del λ–Calcolo senza tipi introdotto nella sezione precedente. In particolare ci interessa mantenere i λ–termini e la relazione di uguaglianza tra termini: le formule ben formate (fbf) del nostro sistema formale saranno appunto della forma

$$\lambda - -termine \;=\; \lambda - -termine$$

La notazione tipica della logica del primo ordine è utilizzata come meta–notazione ma lo schema del sistema resta comunque:

Alfabeto — Fbf — Assiomi — Regole.

Assumeremo data una gödellizzazione dei λ–termini.

Introduciamo la prima parte del sistema che verrà esteso in seguito per consentirgli l'implementazione del principio di estensionalità.

Sistema λ_β

Alfabeto Come riserva di simboli S prendiamo i λ–termini più il simbolo '='. (La numerabilità è assicurata dall'esistenza della gödellizzazione per i λ–termini postulata);

Fbf $W \subseteq S^3$ (in particolare $S \times \{=\} \times S$). Vista la effettività della definizione dei λ–termini è immediata la decidibilità di W.

Assiomi Abbiamo tre schemi di assioma a cui ne verrà aggiunto uno in seguito:

α $(\lambda x.M) = (\lambda y.[y/x]M)$ se $y \in FV(M)$

β $(\lambda x.M)N = [N/x]M$

ρ $M = M$

Regole Abbiamo le seguenti regole di inferenza:

μ $\frac{M=M'}{NM=NM'}$

$\ni$ $\frac{M=M'}{MN=M'N}$

ξ $\frac{M=M'}{\lambda x.M=\lambda x.M'}$

τ $\frac{M=N \ \& \ N=P}{M=P}$

σ $\frac{M=N}{N=M}$

Osserviamo che per ora come Fbf abbiamo un sovrainsieme di quelle a cui siamo interessati che saranno invece $Con_{\lambda_\beta}(\{\})$ che proveremo coincidere con $=_\beta$.

Sono molto utili le seguenti definizioni esplicite:

$$d_1 \begin{cases} F^0 M \equiv M \\ F^{n+1} M \equiv F(F^n M) \end{cases}$$

$$d_2 \begin{cases} FM^{\ 0} \equiv F \\ FM^{\ (n+1)} \equiv FM^{\ n} M \end{cases}$$

Osserviamo che volendo un sistema formale che gestisca la β–riducibilità dovremo sostituire $=$ con $\trianglerighteq$ e sopprimere la regola σ.

Nota: negli schemi di assioma α e β con $[a/x]P$ si intende il risultato effettivo della sostituzione non la sua semplice indicazione.

Seguono alcune proprietà notevoli del sistema formale descritto.

Teorema 6.4 (Completezza) *$M =_\beta N \Longrightarrow \lambda_\beta \vdash M = N$.*
Dimostrazione: per induzione sulla lunghezza della trasformazione $M \equiv P_0 \to \ldots \to P_n \equiv N$.

- (base) se $n = 0$ ho $M \equiv N$ e per l'assioma ρ ho la tesi.
- (induzione) se ho $n+1$ passi e so che il teorema è provato per n passi osservo che, per definizione di $=_\beta$, qualunque sia l'ultimo passo tra quelli consentiti può essere riportato in λ_β sfruttando le regole e gli assiomi.

□

Teorema 6.5 (Correttezza) *$\lambda_\beta \vdash M = N \Longrightarrow M =_\beta N$.*
Dimostrazione: per induzione sulla lunghezza della derivazione (n è il numero di passi).

- (base) se $n = 0$ abbiamo una istanza degli assiomi per cui si applica agevolmente la definizione di $=_\beta$.
- (induzione) provato il teorema per un numero di passi $i \leq n$ lo proviamo per $i \leq (n+1)$ in modo immediato osservando che l'$(n+1)$-esimo passo è l'applicazione di una regola; basta notare come $=_\beta$ (ripensiamone il significato e le proprietà) sia preservata da tutte le regole.

□

Definizione 6.14 *Dato un sistema formale avente equazioni come Fbf diremo che è consistente se* **non** *prova tutte le equazioni chiuse in esso (in caso contrario lo diciamo inconsistente).*

Teorema 6.6 (Consistenza) λ_β *è un sistema formale consistente.*
Dimostrazione: presi M e N λ-termini chiusi in β-nf tali che $M \not\equiv_\alpha N$, avremo che $M \neq_\beta N$ (per il teorema di unicità della forma normale dei λ-termini); ma allora per il teorema di correttezza avrò che $\lambda_\beta \nvdash M = N$. □

Osserviamo come abbiamo ottenuto un risultato sintattico sfruttando considerazioni di carattere semantico.

Ricordando il principio di *estensionalità*:

$$(\forall x.f(x) = g(x)) \Rightarrow f = g$$

notiamo come possa essere assorbito dal sistema λ_β con l'aggiunta del seguente assioma:

$$(\eta) \quad \lambda x.Mx = M \quad se x \notin FV(M)$$

ottenendo un nuovo sistema chiamato $\lambda_{\beta\eta}$.

L'interesse per i sistemi appena descritti potrebbe sembrare alquanto limitato fino a che non si evidenzia la potenza espressiva di quanto è celato nel loro alfabeto.

L'avere scelto (in modo apparentemente insolito) i λ–termini come riserva di simboli è un passo fondamentale poiché i sistemi costruiti risultano essere strumenti formali estremamente interessanti per derivare ed indagare proprietà di questi importanti oggetti.

Esempio: visto che λ_β ha $=_\beta$ come corrispettivo semantico, siamo in grado di stabilire che il problema di decidere la β–uguaglianza tra due generici λ–termini è semi-decidibile ossia l'insieme delle coppie di λ–termini β–uguali è almeno ricorsivamente enumerabile.

Notiamo che i λ–termini stessi sono ottenibili da un sistema formale con una struttura del tipo presentato di seguito. Chiamando λ questo sistema avremo che l'insieme dei λ–termini risulta essere $Con_\lambda(\{\})$:

Sistema λ

Alfabeto $\{\lambda, \; . \; , (,)\} \cup V \cup C$
dove V è un insieme numerabile di simboli di variabile e C un insieme al più numerabile di simboli di costante;

Fbf scaturiscono dalla definizione ricorsiva data per i λ– termini già nota (la decidibilità di questo insieme è immediata poché presa una qualunque stringa di simboli dell'alfabeto si può stabilire in un numero finito di passi se abbia la struttura di λ–termine);

Assiomi abbiamo quattro schemi d'assioma:

- (MN) con M, N λ–termini;
- $(\lambda x.M)$ con M λ–termine;
- x (ogni variabile);
- c (ogni costante);

Regole scaturiscono dalla definizione di sostituzione:

- applicazione: $\frac{(\lambda x.M)N}{[N/x]M}$;
- cambio di variabile legata: $\frac{\lambda x.M}{\lambda y.[y/x]M}$;

Definizioni si riprendono le definizioni esplicite d_1 e d_2 e la notazione di Schönfinkel ($M^k N$ e MN^k).

Osserviamo che la correttezza e completezza del sistema rispetto alla definizione di λ–termine è di facile prova; per la consistenza basta notare che $\{\} \not\vdash \lambda c.M$.

6.4 Combinatori

La teoria dei Combinatori è un formalismo di tipo funzionale computazionalmente equivalente al λ–Calcolo. Elemento fondamentale sono le definizioni esplicite che vengono sfruttate in modo massiccio col risultato di consentire astrazioni di livello tale da rendere tale formalismo molto vicino ad un comune linguaggio di programmazione: in particolare riusciamo a riprodurre strutture dati e meccanismi di controllo del flusso della computazione. Riprendiamo i concetti di questa elegante teoria immergendoli nel λ–Calcolo.

Definizione 6.15 (λ–combinatore) *Dico λ–combinatore un qualunque λ–termine chiuso non contenente costanti.*

Particolarmente interessanti sono i seguenti λ–combinatori:

S $\lambda xyz.xz(yz)$

K $\lambda xy.x$ -kostant-

I $\lambda x.x$ -identity-

Ricordiamo che un punto fisso di una funzione F è un elemento x tale che $x = Fx$.

Teorema 6.7 *Ogni funzione F ammette almeno un punto fisso.*
Dimostrazione: posto $W \equiv \lambda x.F(xx)$ ed $X \equiv WW$ si ha:

$$X \equiv (\lambda x.F(xx))W \to F(WW) \equiv FX$$

. $\square$

Definizione 6.16 *Un combinatore di punto fisso è un λ–termine M tale che $\forall F \in \{\lambda\text{–termini}\}$ risulta $MF \equiv F(MF)$.*

Esempio di combinatore di punto fisso è

$$Y \equiv \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

.

Altri combinatori interessanti sono:

Bool $T \equiv \lambda xy.x$ — $F \equiv \lambda xy.y$;

Condizionale $(ifBthenMelseN) \equiv BMN$ con $B \equiv T$ o $B \equiv F$;

Coppia $[M; N] \equiv \lambda z.zMN$ i cui selettori sono:

- $(C)_0 \equiv CT$ – prima componente –
- $(C)_1 \equiv CF$ – seconda componente –

Sequenze vengono definite induttivamente come:

$$\begin{cases} \lfloor M \rfloor \equiv M \\ \lfloor M_0, \ldots, M_n \rfloor \equiv [M_0; \lfloor M_1, \ldots, M_n \rfloor] \end{cases}$$

il cui selettore è:

$$\pi \begin{cases} \pi_i^n \equiv \lambda x.xF\ {}^iT \ con\ i < n \\ \pi_n^n \equiv \lambda x.xF\ {}^n \end{cases}$$

dove $\pi_i^n \lfloor M_0 \ldots M_n \rfloor \equiv M_i$;

N-uple $\langle M_0, \ldots, \rangle \equiv \lambda z.zM_0 \ldots M_n$ Il cui selettore è:

$$P \begin{cases} U_i^n \equiv \lambda x_0 \ldots x_n.x_i \\ P_i^n \equiv \lambda x.xU_i^n \end{cases}$$

dove $P_i^n \langle M_0 \ldots M_n \rangle \equiv M_i$;

Composizione $M \circ N \equiv \lambda x.M(Nx)$;

Numerali per ogni n numero naturale ne definiamo la codifica $\overline{n}$ come:

$$\begin{cases} \overline{0} \equiv I \\ \overline{n+1} \equiv \ \lfloor F, \overline{n} \rfloor \end{cases}$$

Sui numerali definiamo gli operatori Successore, Predecessore e il test che controlla se n vale 0:

- $S^+ \equiv \lambda x.\lfloor F, x \rfloor$ $(S^+\overline{n} \equiv \overline{n+1})$;
- $P^- \equiv \lambda x.xF$ $(P^-\overline{n+1} \equiv \overline{n})$;
- $Zero \equiv \lambda x.xT$ $(Zero(\overline{0}) \equiv T$ — $Zero(\overline{n+1}) \equiv F)$.

Porremo per brevità $M^+ \equiv S^+ M ed M^- \equiv P^- M$.

Le definizioni viste aiutano a compiere un deciso passo verso la visione del λ–Calcolo come linguaggio di programmazione dato che, modulo un certo sforzo per abituarsi alla nuova sintassi usata per denotare le varie strutture, ne ritroviamo i costrutti base.

Questa osservazione getta un ponte tra λ–Calcolo e Macchine di Turing rendendo meno sorprendente il risultato che qui enunciamo e ci riservandoci di provare nel resto del lavoro: λ–Calcolo è un formalismo Turing–equivalente.

Notiamo che questa equivalenza si perde per il λ–Calcolo con tipi dove viene sacrificata in favore di una maggiore espressività.

6.5 Turing–equivalenza

Il risultato enunciato nella sezione precedente verrà ora dimostrato formalmente anche se non scenderemo nei minimi dettagli preferendo invece insistere sull'idea generale della dimostrazione.

La Turing–completezza del λ–Calcolo ci assicura, in virtù della tesi di Church, che il formalismo dispone della massima potenza computazionale possibile: il risultato non verrà ottenuto per via diretta bensì passando attraverso le funzioni parziali ricorsive la cui Turing–equivalenza è già provata (A.A.A. Montanari 76').

Definizione 6.17 *Una funzione numerica è una mappa* $\varphi : N^p \to N$.

Definizione 6.18 *Una funzione numerica φ a p argomenti è detta λ–definibile se e solo se esiste un λ–termine F tale che $\forall n_1 \ldots n_p \in N^p$ si abbia:*

$$F\overline{n_1}\ldots\overline{n_p} = \overline{\varphi(n_1 \ldots n_p)}$$

Notazione: $\overline{\vec{n}} = \overline{n_1}\ldots\overline{n_p}$.
Osservazione: lavoriamo, per ora, solo con funzioni totali.

Definizione 6.19 *Chiamo funzioni iniziali le funzioni numeriche così definite:*

- $U_i^p(\vec{n}) = n_i$
- $S^+(n) = n+1$
- *Z(n) = 0*

Definizione 6.20 *Sia P una relazione numerica; definisco $\mu m[P(m)]$ come il minimo $m \in N$ che soddisfa P e tale che $P(n)$ è definito per ogni $0 \leq n < m$; se un tale m non esiste pongo $\mu m[P(m)] = \perp$ (indefinito).*

Definizione 6.21 *Data una clase A di funzioni numeriche diremo che:*

- *A è chiusa per composizione se e solo se, prese $\chi, \psi_1, \ldots, \psi_n$ in A di arietà opportuna, anche $\chi(\psi_1 \ldots \psi_n)$ è in A;*
- *A è chiusa per ricorsione primitiva se e solo se, prese χ e ψ in essa, anche φ è in A con:*
$$\begin{cases} \varphi(0,\vec{n}) = \chi(\vec{n}) \\ \varphi(k+1,\vec{n} = \psi(\varphi(k,\vec{n}),k,\vec{n}) \end{cases}$$
- *A è chiusa per minimizzazione se e solo se, data $\chi \in \mathcal{A}$ tale che $\forall \vec{n}\, \exists m.\chi(\vec{n},m) = 0$, allora esiste φ in A tale che:*
$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n},m) = 0]$$

.

Definizione 6.22 *La classe $\Re$ delle funzioni totali ricorsive è la minima classe di funzioni che comprende le funzioni iniziali ed è chiusa per composizione, minimizzazione e ricorsione primitiva.*

Prima di proseguire è utile ricordare un risultato di calcolabilità di tipo limitativo: 'Non esiste un formalismo che calcola *tutte e sole* le funzioni totali.'

Lemma 6.1 *Le funzioni iniziali sono λ–definibili.*
Dimostrazione:

- $U_i^p \equiv \lambda\vec{x}.x_i$
- $S^+ \equiv \lambda x.\lfloor F, x \rfloor$
- $Z \equiv \lambda x.\overline{0}$

□

Lemma 6.2 *Le funzioni λ–definibili sono chiuse per composizione.*
Dimostrazione: data $\chi, \psi_1, \ldots, \psi_m$ e le rispettive λ–definizioni G, H_1, ..., H_m, avremo che $\varphi(\overline{n}) = \chi(\psi_1(\vec{n}), \ldots)$ è definita da $F \equiv \lambda\vec{x}.G(H_1\vec{x})\ldots(H_m\vec{x})$. □

Lemma 6.3 *Le funzioni λ–definibili sono chiuse per ricorsione primitiva.*
Dimostrazione: l'algoritmo da implementare è, nella versione più semplice, una ricerca successiva per tentativi; quindi se ho φ, χ, ψ come da definizione con F, G, H rispettive implementazioni vorrò:

$$Fx\vec{y} = if\ Zero\ x\ then\ G\vec{y}\ else\ H(Fx^{-}\vec{y})x^{-}\vec{y}$$

e per induzione su k si prova che $F\overline{k}\overline{\vec{n}} = \overline{\varphi(k, \vec{n})}$ quindi φ è λ–definita. □

Lemma 6.4 *Le funzioni λ–definibili sono chiuse per minimizzazione.*
Dimostrazione: una dimostrazione precisa richiederebbe l'introduzione di un nuovo operatore di punto fisso Θ ed una notazione specifica per semplificare il trattamento dei numerali. La struttura della dimostrazione è la seguente: se $\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$, con χ λ–definita da G, allora esiste F tale che $F\vec{x} = \mu[\lambda y.Zero(G\vec{x}y)]$ con μ che opportunamente λ–definisce φ. □

Teorema 6.8 *Tutte le funzioni totali ricorsive sono λ–definibili.*
Dimostrazione: segue dai lemmi precedenti e dalla definizione di $\Re$. □

Teorema 6.9 (Kleene) *Le funzioni numeriche λ–definibili sono tutte e sole le funzioni ricorsive.*

L'osservazione di calcolabilità fatta in precedenza abbinata al teorema di Kleene ci mostrano come non tutte le funzioni totali siano λ–definibili. Notiamo anche come sembri sfuggirci la modellabilità delle funzioni parziali di cui le totali sono solo una sottoclasse.

Questi limiti apparenti del λ–Calcolo derivano solo dalla definizione usata fino ad ora di λ–definibilità ed dalle particolarità richieste all'operatore μ. Rimuovendo questi ostacoli potremo osservare tutta la potenza espressiva del λ–Calcolo.

Definizione 6.23 *Definiamo per casi la* **solubilità** *di un λ–termine M:*

- *se M è chiuso sarà solubile se e solo se $\exists n \exists \vec{N}.(M\vec{N} = I)$ con $\vec{N}$ vettore di n elementi;*
- *se M è generico lo dico solubile se e solo se la chiusura di M è solubile (se $\vec{x} = FV(M)$ la chiusura di M è $\lambda\vec{x}.M$);*
- *M è insolubile altrimenti.*

Osserviamo che abbiamo dato la I–solubilità: sostituendo K ad I otterremo la K–solubilità:

Definizione 6.24 *Una funzione numerica parziale φ di arietà p è λ–definibile se e solo se esiste un λ–termine F tale che per ogni $\vec{n}$ in N^p risulta*

$$\begin{cases} F\overline{\vec{n}} = \overline{\varphi(\vec{n})}\ se\ \varphi(\vec{n})\downarrow \\ \\ F\overline{\vec{n}} insolubile\ se\ \varphi(\vec{n})\uparrow \end{cases}$$

Notiamo che le funzioni totali sono λ–definibili nel senso specificato per le funzioni parziali.

Definizione 6.25 *Data una classe A di funzioni numeriche parziali:*

1. *A è chiusa per composizione se e solo se, date χ, $\psi_1, \ldots, \psi_m$ in A, anche $\varphi \cong \chi(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ appartiene ad A;*

2. *A è chiusa per minimizzazione se e solo se χ in A implica che φ sia in A, dove*
$$\varphi(\vec{n}) = \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$$
.

Osservazioni: diciamo che due funzioni sono equivalenti ($\cong$) se e solo se coincidono su tutto il dominio.

Definizione 6.26 *La classe PR delle funzioni parziali ricorsive è la più piccola classe di funzioni che contiene le funzioni totali ricorsive ed è chiusa per composizione e minimizzazione.*

Provare la chiusura per composizione nella nuova definizione è più complesso poiché la funzione risultante da una composizione non è necessariamente il composto dei termini componenti (non abbiamo = bensì $\cong$).

Lemma 6.5 *Risultati utili sono:*

- $\forall m \in N.\overline{m}KII = I$, *ossia i numerali sono uniformemente solubili;*
- *sia F la λ–definizione della funzione φ; ho che $\forall \vec{n} \in N^k$ risulta:*

$$\begin{cases} F\overline{\vec{n}}KII = I se \varphi(\vec{n}) \downarrow \\ F\overline{\vec{n}}KII \text{è insolubile altrimenti.} \end{cases}$$

Lemma 6.6 (C) *Le funzioni parziali λ–definibili sono chiuse per composizione.*
Dimostrazione: se $\varphi = \chi(\psi_1, \ldots, \psi_m)$ con χ e ψ_j λ–definite da G ed H_j rispettivamente, affermiamo che

$$F \equiv \lambda\vec{x}.(H_1\vec{x}KII)\ldots(H_m\vec{x}KII)(G(H_1\vec{x})\ldots(H_m\vec{x}))$$

λ–definisce la funzione φ; infatti:

- se $\varphi_j(\vec{n}) \uparrow$ allora $F\overline{\vec{n}}KII$ sarà insolubile;
- se $\forall j \in (1\ldots m).\varphi(\vec{n}) \downarrow$ allora $F\overline{\vec{n}}$ si riduce a $F\overline{\vec{n}} = G(H_1\overline{vecn})\ldots(H_m\overline{vecn})$ che era quanto voluto (rivedere la dimostrazione fatta per le funzioni totali).

□

Lemma 6.7 (Mi) *Le funzioni parziali λ–definibili sono chiuse per minimizzazione.*
Dimostrazione: sfruttiamo il risultato (che non proviamo) per cui se P è un λ–termine tale che $\forall n.P\overline{n} = F$ allora μP è insolubile. Sia $\varphi(\vec{n}) \cong \mu m[\chi(\vec{n}, m) = 0]$ con χ totale e λ definita da G; poniamo

$$F \equiv \lambda\vec{x}.\mu[\lambda y.Zero(G\vec{x}y)]$$

avremo che:

- se $\varphi(\vec{n}) \downarrow$ allora $\exists m.\chi(\vec{n}, m) = 0$ implica $F\overline{\vec{n}} = \varphi(\vec{n})$;
- se $\varphi(\vec{n}) \uparrow$ allora $\forall m.\chi(\vec{n}, m) \neq 0$ implica $\forall m.Zero(G\overline{\vec{n}}\overline{m}) = F$ che per il risultato citato sempre implica che $F\overline{\vec{n}} = \mu[Zero(G\overline{\vec{n}}y)]$ è insolubile.

Quindi F λ–definisce φ. □

Lemma 6.8 (Kl) *Se F λ–definisce φ (parziale) allora* $\varphi(\vec{n}) = m \Longleftrightarrow F\overline{\vec{n}} = \overline{m}$.
Dimostrazione:
($\Rightarrow$) per definizione;
($\Leftarrow$) se $F\overline{\vec{n}} = \overline{m}$ allora per la solubilità di m ho che $\varphi(\vec{n}) \downarrow$ e $\varphi(\vec{n}) = m'$. Ma $\overline{m} = \overline{m'} \Rightarrow m = m'$. $\square$

Il risultato principale del presente lavoro si riassume nel seguente teorema:

Teorema 6.10 *Una funzione numerica parziale è parziale ricorsiva se e solo se è λ–definibile.*
Dimostrazione:
($\Rightarrow$) dai lemmi precedenti;
($\Leftarrow$) se φ è λ–definita da F allora per il lemma Kl ho $\varphi(\vec{n}) = m \Leftrightarrow \vdash_\lambda F\overline{\vec{n}} = \overline{m}$ e dalla parziale ricorsività della parte destra discende la stessa proprietà per la parte sinistra. $\square$

6.6 Conclusioni

Con λ_β abbiamo introdotto gli strumenti formali necessari alla gestione di equazioni tra λ–termini e quindi le funzioni ricorsive. Tale risultato certifica la potenza del λ–formalismo e lo candida come mezzo di verifica di Turing–equivalenza per altri sistemi: basterà infatti codificare in essi il λ–formalismo per essere certi di disporre della massima potenza computazionale possibile. Esempi di sviluppo verso l'alto del λ–calcolo sono il LISP e, con portata molto più limitata, il LAOS, dove la definizione di combinatori opportuni rende il paradigma funzionale applicabile effettivamente a problemi reali di programmazione.

Capitolo 7

Introduzione alle Reti di Petri

7.1 Teoria elementare delle Reti di Petri

Sintetizziamo alcune definizioni fondamentali che consentono di avere una prima intuizione sulla struttura e sulle potenzialità delle Reti di Petri.

Disegnate per modellare la comunicazione in sistemi i cui componenti evolvono in maniera concorrente ed interagiscono in modo asincrono, esse sono lo strumento ideale qualora si vogliano analizzare le relazioni causali tra gli eventi che influenzano lo stato del sistema stesso prestandosi in modo particolare, ma non esclusivo, alla modellazione di sistemi hardware e software.

La loro definizione formale sfrutta il concetto di multiinsieme (bag) con relativi formalismi e risultati che riprendiamo brevemente. Intuitivamente il multiinsieme è una estensione del più usuale concetto di insieme in cui consentiamo ad un elemento di essere rappresentato in più copie; avremo:

- un insieme D di supporto a cui gli elementi del bag appartengono (se poniamo la limitazione che non si possano avere più di n copie di ogni elemento, l'inseme dei bag possibili è indicato con D^n dove $n \in Nat \cup \{\omega\}$);
- una funzione $\# : D \times D^n \rightarrow Nat$ che, preso un elemento $d \in D$ ed un bag B, restituisce il numero di copie di d contenute in B.

Sfruttando la definizione di $\#$, seguono immediatamente le definizioni delle più comuni operazioni tra bag; è interessante notare come gli insiemi siano particolari bag in cui si imponga la restrizione $0 \leq \#(x, B) \leq 1$ per ogni elemento x di B.

Come spesso accade per i prodotti migliori, le reti di Petri sono potenti e flessibili senza per questo presentare strutture complesse o formalismi complicati (ne è stata sviluppata anche una forma grafica particolarmente intuitiva):

Definizione 7.1 *Una* Struttura di Petri *C è una quadrupla (P, T, I, O) dove:*

- *P è un insieme finito di elementi detti* posizioni*;*
- *T è un insieme finito di elementi dette* transizioni*;*
- *$I : T \rightarrow P^\omega$ associa ad ogni transizione un bag di posizioni dette di* Input*;*
- *$O : T \rightarrow P^\omega$ associa ad ogni transizione un bag di posizioni dette di* Output*.*

Diremo che p_i è una posizione di input per t_j se e solo se $\#(p_i, I(t_j)) > 0$; diremo che è una posizione di output, sempre per t_j, se e solo se $\#(p_i, O(t_j)) > 0$; la cosa si può facilmente vedere dalla parte delle posizioni dicendo che t_j è di input per p_i se e solo se $\#(p_i, O(t_j)) > 0$ e similmente per l'output. Notiamo che la molteplicità di input ed output è definita sempre sfruttando # (es. t_j ha molteplicità di output $\Sigma_{x \in D} \#(x, O(t_j))$ e può anche considerarsi limitatamente ad una posizione ed una transizione specifiche).

La versione grafica della Struttura di Petri è un multigrafo diretto bipartito (un multigrafo è un grafo in cui si possono avere più archi che vanno da un nodo ad un altro ed è bipartito se posso partizionare i nodi in due insiemi tali che non ho archi congiungenti gli elementi di uno stesso insieme). Rappresentiamo con dei cerchi le posizioni, con delle aste le transizioni; le funzioni di output e input sono indicate collegando con archi gli elementi interessati (es: se $O(t) = \{p_1, p_1, p_3\}$ avrò un arco da t a p_3 e due archi da t a p_1).

Definizione 7.2 *Data una struttura* $C = (P, T, I, O)$ *diciamo* marking *per* C *una funzione* $\mu : P \rightarrow Nat$.

La funzione di marking associa un certo numero di gettoni ad ogni posizione e può anche vedersi in forma di vettore la cui posizione i–esima contiene l'intero $\mu(p_i)$; il significato di questa costruzione si chiarisce immediatamente considerando il funzionamento della rete di Petri.

Definizione 7.3 *Una transizione* t_j *in* T *è abilitata in* (C, μ) *se e solo se per ogni* p_i *in* P *si ha* $\mu(p_i) \geq \#(p_i, I(t_j))$.

Definizione 7.4 *Una transizione* t_j può *'sparare' quando è abilitata. Lo sparo di* t_j *comporta la trasformazione di* μ *in* μ' *tale che per ogni posizione risulta:*

$$\mu'(p_i) \ = \ \mu(p_i) \ - \ \#(p_i, I(t_j)) \ + \ \#(p_i, O(t_j))$$

In altri termini, una transizione t è abilitata quando ogni posizione che ha n archi diretti su t ha almento n gettoni; l'effetto dello sparo è di risucchiare un gettone da ogni arco entrante e spedire un gettone su ogni arco uscente. Nota che non c'è un 'principio di conservazione dei gettoni' che leghi gli acquisti alle uscite quindi il numero di gettoni assorbiti non ha alcun legame col numero di gettoni prodotti. La cosa è più chiara pensando alle posizioni come a delle condizioni che sono verificate se c'è il numero sufficiente di gettoni e vedendo le transizioni come eventi che modificano le precondizioni producendo delle postcondizioni: in quest'ottica il bilanciamento di ingressi ed uscite perde generalmente significato.

Considerando μ come lo stato della rete possiamo definire una funzione detta *prossimo stato* che prende lo stato attuale ed una mossa abilitata e restituisce lo stato seguente allo sparo della mossa:

Definizione 7.5 $\sigma : \mu \times t \rightarrow \mu'$.

Tale funzione si può estendere in modo da considerare il risultato di più spari *consecutivi*.

Dati due stati μ_1 e μ_2 diremo che μ_2 è raggiungibile partendo da μ_1 se e solo se esiste una sequenza di spari che trasformi l'uno nell'altro; se esiste una sequenza di un solo passo che collega i due stati diremo che μ_2 è immediatamente raggiungibile partendo da μ_1, e viceversa.

Questo chiude la definizione del formalismo, a meno di proposte particolari fatte per risolvere problemi specifici e comunque ad esso riconducibili (es. transizioni con durata temporale variabile); alcune considerazioni sono comunque fondamentali anche perché catturano problemi pratici di notevole portata.

Analizzando l'aspetto concorrente delle reti di Petri notiamo come esse non prevedano un modo per scegliere, tra più transizioni abilitate, quella che deve sparare per prima. Se in molti casi questo non ha importanza ed anzi rispecchia la possibilità di avanzamento concorrente dei sottosistemi, in molti casi può essere causa di ambiguità ed inconsistenze: il disegnatore della rete deve tenere conto di questa caratteristica del formalisno e configurare opportunamente il modello. Anche il fattore tempo, cruciale nello studio di molti sistemi reali, ha un trattamento particolare: si ipotizza infatti che tutti i passi abbiano durata temporale nulla o comunque infinitesima il che porta a due importanti conseguenze:

- non è immediatamente codificabile il peso che il tempo ha nella abilitazione delle transizioni;
- la probabilità che due spari siano simultanei è praticamente nulla e si può dunque vedere l'evoluzione del sistema come una *successione* di passi (si evitano problemi di collisione).

Tali conseguenze devono essere valutate con attenzione in fase di progetto.

La nota finale è dedicata al trattamento dell'input/output (da non confondere con le funzioni I ed O della struttura C). In quanto non primitivo nel formalismo, esso viene emulato attribuendo significati particolari a un insieme di posizioni interconnesse opportunamente col resto della rete: queste tecniche favoriscono anche la modularità delle reti che possono essere interconnesse.

Fissato un alfabeto di simboli A possiamo considerare il linguaggio associato ad una particolare rete di Petri: associando infatti un simbolo ad ogni transizione, il linguaggio associato alla rete indica tutte le sequenze di transizioni possibili ossia tutte le possibili forme di evoluzione del sistema stesso (è interessante valutare la relazione tra le caratteristiche del linguaggio e la struttura della rete).

Rimandiamo all'opera di Peterson ("Petri Net Theory and the Modelling of Systems") per esempi significativi dell'uso di questo interessante sistema formale (vi si possono trovare anche alcuni risultati sulla decidibilitá di alcune proprietá delle reti).