Sistemi deduttivi per la logica predicativa

Lezione 17 di Fondamenti di informatica

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2008-09

Indice

calcoli assiomatici Hilbert-Frege

un **calcolo assiomatico** determina la deducibilità di una Σ-formula φ da un insieme Φ di Σ-formule mediante un sistema formale costituto da:

- **assiomi**: schemi di formule logicamente valide
- **regole di inferenza**: permettono di dedurre il **conseguente** di un'istanza della regola se ne sono stati già dedotti gli **antecedenti**

ad esempio, ecco un **sistema HF** di questo tipo per la logica predicativa ristretta agli operatori logici $\to$, $\neg$, $\forall$ e trascurando l'eguaglianza:

assiomi HF:

$\varphi \to (\psi \to \varphi)$

$(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$

$(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$

$\forall x\varphi(x) \to \varphi(t)$ [t liberamente sostituibile a x in $\varphi(x)$]

$(\psi \to \varphi(x)) \to (\psi \to \forall x\varphi(x))$ [$x \notin Free(\psi)$]

regola di inferenza HF (*modus ponens*): *se φ, $\varphi \to \psi$ allora ψ*

teorema di deduzione

una **deduzione HF** di φ da Φ è una sequenza finita di formule che sono istanze di assiomi HF, o di formule in Φ, o dedotte per *modus ponens* da formule precedenti

$\Phi \vdash_{HF} \varphi$ designa l'esistenza di una tale sequenza

si scrive $\vdash_{HF} \varphi$ se si usano solo gli assiomi HF e la sua regola di inferenza, nel qual caso φ è un **teorema HF**

il **teorema di deduzione** (Herbrand, Tarski, 1930) generalizza alla logica predicativa un noto principio di logica proposizionale, relativamente alla deducibilità da una teoria Φ data:

$\Phi, \varphi \vdash_{HF} \psi \Rightarrow \Phi \vdash_{HF} \varphi\to\psi$

schema di dimostrazione: preliminarmente si dimostra il lemma $\vdash_{HF} \varphi\to\varphi$

quindi, data per ipotesi una deduzione HF: $\Phi, \varphi \vdash_{HF} \psi$, se ne costruisce la $(\varphi\to)$-trasformata rimpiazzandovi ogni formula θ che vi occorre con la formula $\varphi\to\theta$

- la trasformata **non** è la deduzione HF voluta, ma aggiungendovi altri passi, giustificati dagli assiomi HF, si ottiene una deduzione HF di $\varphi\to\psi$ da Φ e $\varphi\to\varphi$
- poiché $\varphi\to\varphi$ è un teorema HF, segue la tesi

deduzione naturale

i calcoli assiomatici, di parca eleganza, non sono di facile impiego
si veda ad es. la deduzione del lemma impiegato nella dimostrazione del teorema di deduzione, Lemma 3.1 nel testo (Manca, 2001)
proprio il teorema di deduzione diede avvio alle ricerche di Gentzen sulla teoria della dimostrazione, verso formalizzazioni più prossime al ragionamento matematico
i calcoli di **deduzione naturale** devono il loro nome a tale ispirazione
caratteristiche della deduzione naturale:
il calcolo consta di due tipi di regole di inferenza per ciascun operatore logico:
eliminazione: l'operatore occorre nelle premesse, ma non nelle conclusioni
introduzione: l'operatore occorre nelle conclusioni, ma non nelle premesse
una deduzione naturale è una sequenza di passi di tre tipi:
imposizione di **ipotesi**
eliminazione di un'ipotesi precedente, e **blocco** delle successive formule, per sua introduzione quale antecedente di una implicazione
deduzione per istanziazione di una regola di inferenza, le cui premesse sono state già dedotte e non bloccate

deduzione naturale predicativa

"/" separa le premesse dalle conclusioni (di solito si usa una linea orizzontale)

E∧ : $\varphi \wedge \psi$ / φ	I∧ : φ, ψ / $\varphi \wedge \psi$
E∧ : $\varphi \wedge \psi$ / ψ	I∨ : φ / $\varphi \vee \psi$
E∨ : $\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \varphi \vee \psi$ / χ	I∨ : ψ / $\varphi \vee \psi$
E→ : $\varphi, \varphi \to \psi$ / ψ	I→ : ψ / $\varphi \to \psi$
E¬ : $\neg\varphi \to \bot$ / φ	I¬ : $\varphi \to \bot$ / $\neg\varphi$
E⊥ : $\bot$ / φ	I⊥ : $\varphi, \neg\varphi$ / $\bot$
E∀ : $\forall x \varphi(x)$ / $\varphi(t)$	I∀ : $\varphi(y)$ / $\forall x \varphi(x)$
E∃ : $\varphi(y) \to \psi, \exists x \varphi(x)$ / ψ	I∃ : $\varphi(t)$ / $\exists x \varphi(x)$

N.B. nelle regole E∃ e I∀, y non deve occorrere libera in ψ né in alcuna **assunzione** di $\varphi(y)$, ovvero ipotesi (non eliminata) nella sua deduzione
L'ultima formula in una deduzione naturale è la sua **tesi**
$\varphi_1,\ldots,\varphi_n \vdash \psi$ designa una deduzione naturale di tesi ψ e ipotesi (non eliminate) $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$

esempi di deduzione naturale

$\forall x Px \vdash \neg\exists x \neg Px$

1.	$\forall x Px$	(h)
2.	$\exists x \neg Px$	(h)
3.	$\neg Py$	(h)
4.	Py	(E$\forall$, 1)
5.	$\bot$	(I$\bot$, 3, 4)
6.	$\neg Py \to \bot$	(I$\to$, 5: -h3)
7.	$\bot$	(E$\exists$, 2, 6)
8.	$\exists x \neg Px \to \bot$	(I$\to$, 7: -h2)
9.	$\neg\exists x \neg Px$	(I$\neg$, 8)

N.B. Le ipotesi vanno eliminate in ordine inverso a quello di introduzione (LIFO)

$\exists x \forall y Pxy \vdash \forall y \exists x Pxy$

1.	$\exists x \forall y Pxy$	(h)
2.	$\forall y Pxy$	(h)
3.	Pxy	(E$\forall$, 2)
4.	$\exists x Pxy$	(I$\exists$, 3)
5.	$\forall y \exists x Pxy$	(I$\forall$, 4)
6.	$\forall y Pxy \to \forall y \exists x Pxy$	(I$\to$, 5: -h2)
7.	$\forall y \exists x Pxy$	(E$\exists$, 6, 1)

N.B. perché la deduzione non è completa già al passo 5?

temi per ulteriori approfondimenti

1. **Deducibilità secondo Herbrand-Skolem**
   un altro metodo deduttivo per la logica predicativa, che risale a Herbrand, è basato sul teorema di compattezza proposizionale e sulla equisoddisfacibilità tra una teoria predicativa e la sua espansione di Herbrand, si veda la sez. 3.2 del testo (Manca, 2001).
2. **Calcolo dei sequenti di Gentzen**
   analogamente ai calcoli di deduzione naturale, il calcolo dei sequenti è una forma strutturata e modulare di deduzione **diretta**, anziché refutativa; ciononostante, il testo (Manca, 2001) mostra, in sez. 3.4, come questo calcolo sia sostanzialmente una variante notazionale del calcolo dei tableau.
3. **Tipologia dei calcoli logici**
   La sez. 3.6 del testo (Manca, 2001) presenta una interessante tassonomia dei calcoli logici, che traccia le caratteristiche essenziali e il *modus operandi* di ciascun tipo di calcoli deduttivi considerato; si mettono inoltre in evidenza i diversi livelli in cui l'implicazione occorre nella logica predicativa.