Tableau analitici, completezza e compattezza della logica predicativa

Lezione 16 di Fondamenti di informatica

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2009-10

Indice

tableau analitici

problema tradizionale della logica: determinare **forme di ragionamento** valide indipendentemente dalle interpretazioni

obiettivo: costruzione di **algoritmi deduttivi**

il metodo dei **tableau analitici** permette di determinare algoritmicamente tutte le verità logiche predicative

cos'è un **tableau analitico?** un albero (tanto per cambiare ;)

i nodi sono etichettati da **formule predicative**

proprietà semantica: se in un modello vale la formula alla radice, vi devono valere anche tutte le formule di **almeno un ramo** dell'albero (fino alla foglia)

proprietà sintattica: **complessità logica** degli schemi **decrescente** (non strettamente) lungo il cammino dalla radice alla foglia

regole di costruzione: v. appresso (alcune espresse da alberi: **regole tableau**)

deduzione predicativa con tableau

sia Φ una teoria predicativa: un Φ-tableau è un albero con radice etichettata da una formula di Φ, e successivamente costruito applicando ad ogni passo a una foglia f dell'albero una delle seguenti **regole di costruzione:**

introduzione: figlio di f etichettato da una formula di Φ

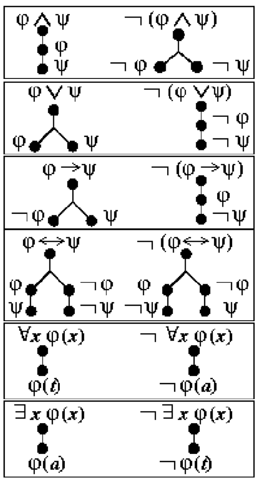
ricopiatura: figlio di f con l'etichetta di un antenato di f

regole tableau: se l'etichetta di f è un'istanza di quella della radice di una regola tableau, si rimpiazza f con l'istanza della regola

doppia negazione: se f ha etichetta $\neg\neg\psi$: figlio di f con ψ

congruenza: se l'etichetta di f è della forma $t_1 = t_2$, e un antenato di f ha etichetta $\chi(t_i)$, con $i \in \{1,2\}$: figlio di f etichettato da $\chi(t_j)$, con $j \in \{1,2\}$, $j \neq i$

chiusura: se ψ è l'etichetta di f, e un suo antenato ha etichetta $\neg\psi$: figlio di f con etichetta $\perp$



N.B. t, t_i indicano termini chiusi **qualsiasi**, mentre a è una costante individuale univocamente determinata dalla formula: **testimone** della formula, o **costante di *Henkin***)

esempio: un cappello universale

esiste qualcuno che se è C (con il cappello) allora tutti sono C

$\vdash \exists x(Cx \to \forall y\, Cy)$

si dimostra per **refutazione** del contrario:

1. $\neg\exists x(Cx \to \forall y\, Cy)$
2. $\neg(Ca \to \forall y\, Cy)$
3. Ca
4. $\neg\forall y\, Cy$
5. $\neg Cb$
6. $\neg(Cb \to \forall y\, Cy)$
7. Cb
8. $\neg\forall y\, Cy$
9. $\bot$

correttezza e decidibilità

un Φ-tableau è **chiuso** se tutti i suoi rami terminano in foglie di etichetta $\bot$

dalla teoria predicativa Φ si deduce la formula ψ con il metodo dei tableau se esiste un $\Phi \cup \{\neg\psi\}$-tableau chiuso

la deduzione $\Phi \vdash_T \psi$ è **refutativa**

correttezza: $\Phi \vdash_T \psi \Rightarrow \Phi \vDash \psi$

poiché ogni teoria che abbia un tableau chiuso è insoddisfacibile

tuttavia, un tableau predicativo può ben essere infinito ... è sempre possibile stabilire se si chiude o meno?

no! $\Rightarrow$ la validità logica predicativa è **indecidibile**

ciò non toglie che esistano teorie predicative decidibili: ma non tutte lo sono!

la validità logica proposizionale è decidibile: perché? (v. esercizio 2.12 del testo (Manca, 2001))

completezza predicativa

l'indecidibilità della validità logica predicativa non è delle peggiori... vale la sua **semidecidibilità**, per la **completezza** della deduzione col metodo dei tableau:

$\Phi \vDash \psi \;\Rightarrow\; \Phi \vdash_T \psi$

schema essenziale della dimostrazione: si definiscono i seguenti **concetti:**

insieme di Hintikka di dominio $\boldsymbol{D}$ (che include le costanti di Σ): un insieme di $\Sigma(\boldsymbol{D})$-formule predicative "chiuso rispetto alle regole tableau" e che non contiene alcuna formula assieme alla sua negata

Φ-tableau sistematico: ottenuto dalla teoria Φ per applicazione esaustiva delle regole di costruzione

quindi si dimostra che:

ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile, cioè ha un modello

Φ è tableau-consistente (*i.e.* non ha tableau chiusi) $\Rightarrow$ il suo tableau sistematico ha un ramo che include Φ ed è un insieme di Hintikka

per i dettagli si veda sez. 2.5 del testo (Manca, 2001)

finitezza e compattezza

per la deduzione predicativa basta sempre una **parte finita** della teoria data:

$\Phi \vDash \psi \;\Rightarrow\; \Delta \vDash \psi$ per qualche $\Delta \subseteq \Phi$, Δ finito

questo, per l'esercizio sulla finitezza, può esser visto come il "corollario deduttivo" del teorema di **compattezza della logica predicativa:**

una teoria predicativa è soddisfacibile sse lo è ogni sua parte finita

che a sua volta è conseguenza quasi immediata della correttezza e completezza della deduzione con il metodo dei tableau, tenendo conto del fatto che ogni tableau chiuso è finito

forme di Skolem

una formula predicativa è in **forma prenessa** se è costituita da una sequenza di quantificazioni, il **prefisso**, seguita da una formula priva di quantificatori, la **matrice**

ogni formula predicativa ne ha una logicamente equivalente in forma prenessa

l'**equisoddisfacibilità** di formule, come pure di teorie, è una relazione molto meno restrittiva dell'equivalenza logica: non richiede che la segnatura sia la stessa

ciò è utile a definire trasformazioni in forme normali equisoddisfacibili

ogni enunciato predicativo ψ in forma prenessa può essere trasformato in uno equisoddisfacibile, Skolem(ψ), privo di quantificatori esistenziali: la **Skolemizzazione** rimpiazza le variabili esistenzialmente quantificate con

simboli di costante (di Skolem), se il quantificatore non è preceduto da quantificatori universali nel prefisso

termini $f(x_1,\dots,x_k)$, se il quantificatore è preceduto da k quantificatori universali nel prefisso, dove f è detta **funzione di Skolem** e i suoi argomenti sono le precedenti k variabili universalmente quantificate

quantificazione universale implicita delle variabili in una forma di Skolem
+ rappresentazione in CNF della matrice → equivalente **rappresentazione a clausole**

espansione di Herbrand

Skolem(Φ) : l'insieme delle forme di Skolem delle forme prenesse ottenute da formule dell'insieme Φ

Σ^*_Φ : la segnatura di **Skolem**(Φ), estesa con un simbolo di costante qualora **Skolem**(Φ) sia privo di tali simboli

universo di Herbrand della teoria Φ:

l'insieme dei termini chiusi di segnatura Σ^*_Φ

espansione di Herbrand della teoria Φ, **Herbrand**(Φ) :

la teoria proposizionale ottenuta da **Skolem**(Φ) istanziandone in tutti i modi possibili le variabili con termini del suo universo di Herbrand

fatto notevole: Φ e **Herbrand**(Φ) sono equisoddisfacibili

temi per ulteriori approfondimenti

1. **Logiche di ordine superiore**
   La compattezza della logica predicativa qui considerata, detta **logica del primo ordine**, ne comporta una limitata espressività, v. ad es. i **teoremi di Löwenheim-Skolem** in sez. 2.7 del testo (Manca, 2001). Da qui discende l'impossibilità di formalizzare l'aritmetica di Peano con una teoria del primo ordine. Le logiche di ordine superiore sono più espressive, ad es. permettono la quantificazione su predicati e/o operazioni. Possono inoltre aversi predicati e funzioni di ordine superiore, tali cioè da avere predicati e funzioni quali argomenti. La minima estensione espressiva della logica del primo ordine che permetta la formalizzazione del principio di induzione di Peano è la **logica monadica del secondo ordine**, che ammette la quantificazione su predicati unari. Il prezzo da pagare al guadagno di espressività di tali logiche è la perdita di completezza dei calcoli deduttivi. Questa può essere recuperata se si ammette una diversa nozione di modello, quella di **struttura di Henkin.** Una introduzione all'argomento è reperibile alla voce Second-order and Higher-order Logic della *Stanford Enciclopedy of Philosophy*. Nonostante i problemi teorici detti, logiche di ordine superiore hanno un ampio spettro di applicazioni in informatica, dalla verifica automatica di circuiti e sistemi hardware alla formalizzazione di varie forme di ragionamento, ad es. modale (in termini di necessità e possibilità), epistemico (logiche del conoscere e del credere), etc.