Logica proposizionale, completezza e compattezza

Lezione 15 di Fondamenti di informatica

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2009-10

Indice

sintassi e semantica proposizionale

la **logica proposizionale** è una forma (molto) ristretta di logica predicativa

sintassi:

formule atomiche: solo simboli proposizionali, altrimenti detti **variabili proposizionali**

connettivi: solo quelli **Booleani**, i quantificatori sono esclusi

semantica:

restrizione della semantica predicativa: un **modello proposizionale** è essenzialmente una **valutazione booleana** delle variabili proposizionali

nonostante tanta semplicità, la logica proposizionale presenta problemi **computazionalmente difficili**

e.g., per stabilire la **soddisfacibilità** di una formula proposizionale occorre un tempo di calcolo **esponenziale** nel numero delle variabili

principî di logica proposizionale

principio di **sostituzione** proposizionale:

$\models \varphi(P) \;\Leftrightarrow\; \models \varphi(\psi)$

principio di **congruenza** proposizionale:

$\models \psi \leftrightarrow \chi \;\Leftrightarrow\; \models \varphi(\psi) \leftrightarrow \varphi(\chi)$

siano: φ^* : la formula ottenuta da φ per scambio di $\wedge$ con $\vee$ e viceversa

$\varphi(\neg)$: la formula ottenuta da φ rimpiazzando gli atomi con i negati

principio di **dualità** proposizionale:

$\models \varphi^* \;\Leftrightarrow\; \models \neg\varphi(\neg)$

teorema di deduzione proposizionale:

$\varphi \models \psi \;\Leftrightarrow\; \models \varphi \rightarrow \psi$

def.: equivalenza proposizionale: $\varphi \equiv \psi$ se le due formule hanno ugual valore di verità per ogni valutazione booleana delle variabili

principio di **equivalenza proposizionale:** $\varphi \equiv \psi \;\Leftrightarrow\; \models \varphi \leftrightarrow \psi$

forme normali proposizionali

memo: **letterale:** formula atomica o negazione di formula atomica

forma normale disgiuntiva (DNF): disgiunzione di congiunzioni di letterali

forma normale congiuntiva (CNF): congiunzione di disgiunzioni di letterali

fatto: ogni formula proposizionale ha equivalenti DNF e CNF

idea di dimostrazione:

per la DNF, formare una matrice delle valutazioni booleane che rendono vera la formula; associare ogni riga ad una congiunzione di letterali, in cui il segno di ciascun letterale corrisponde al valore assegnato alla variabile dalla valutazione booleana della riga associata

per la CNF, si sfrutti il principio di dualità proposizionale

che forme normali possono avere le **tautologie**? e le formule **insoddisfacibili**?

algebra di Lindenbaum-Tarski

qualsiasi sistema di assiomi completo per le algebre di Boole fornisce un **calcolo deduttivo completo** per la logica proposizionale

infatti, gli assiomi Booleani bastano a trasformare ogni formula in una equivalente DNF, che determina la tavola di verità della formula

dagli assiomi di Boole si deriva $\varphi = \psi$ sse $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, e $\varphi = 1$ sse $\models \varphi$

possiamo costruire un'algebra Booleana delle formule proposizionali, dove si identifichino formule equivalenti? (**semantica algebrica**)

l'**algebra di Lindenbaum-Tarski** è una tal costruzione; fissato un insieme **V** di variabili proposizionali:

dominio: il quoziente dell'insieme delle formule proposizionali con variabili in **V** per la relazione di equivalenza proposizionale

operazioni booleane sulle classi di equivalenza: definite per il tramite dei connettivi proposizionali su rappresentanti delle classi

si veda in proposito l'esercizio 3

compattezza proposizionale

una proprietà fondamentale della logica predicativa, che qui consideriamo per il suo frammento proposizionale, è la **compattezza:**

> un insieme numerabile di formule proposizionali è soddisfacibile sse lo è ogni suo sottoinsieme **finito**

una direzione della doppia implicazione è ovvia... l'altra no: asserisce che dall'esistenza di **modelli** (magari diversi) delle parti **finite** di un insieme Ψ di formule consegue l'esistenza di **un** modello di **tutte** le formule di Ψ (infinito): perché crederci?

> per il **lemma di König** : ogni albero finitario infinito ha qualche ramo infinito

questo serve nell'ipotesi che l'insieme **V** delle variabili proposizionali di Ψ sia infinito (numerabile); in caso contrario basta molto meno (v. esercizio 4)

se **V** non è finito, siano $V_1, \dots V_n, \dots$ e $\psi_1, \dots \psi_n, \dots$ risp. denumerazioni di **V** e Ψ; costruiamo un albero binario ordinato dove:

> cammini distinti dalla radice a vertici di livello **n** rappresentano valutazioni booleane distinte delle variabili $V_1, \dots V_n$, tali da soddisfare $\psi_1, \dots \psi_n$

il ramo infinito che, per il lemma di König, tale albero deve avere, dà una valutazione booleana di **V** che soddisfa Ψ

temi per ulteriori approfondimenti

1. **Algebra Booleana e logica proposizionale**
   La costruzione dell'algebra di Lindenbaum-Tarski suggerisce l'esistenza di una stretta connessione fra logica proposizionale e algebra Booleana. Un profondo risultato in proposito è dato dal **teorema di rappresentazione di Stone**, che stabilisce che ogni algebra Booleana è isomorfa ad un'algebra Booleana di insiemi. Approfondimenti su questi ed altri argomenti nell'ambito del tema sono reperibili attraverso la pagina Progetto:Matematica/Elenco di voci sull'algebra booleana della Wikipedia italiana, dove però molte voci sono in attesa di stesura. Un elenco più completo è disponibile nella Wikipedia inglese: List of Boolean algebra topics.
2. **Logica proposizionale intuizionista**
   Alcune delle voci elencate alle pagine suddette riguardano estensioni e generalizzazioni della logica proposizionale. La **logica intuizionista**, proposta agli inizi del XX secolo da L. Brouwer, generalizza quella classica abbandonando il principio del terzo escluso, e costituisce un sistema deduttivo per la **matematica costruttiva**. Le **algebre di Heyting** sono il fondamento algebrico della logica proposizionale intuizionista, analogamente al ruolo delle algebre Booleane rispetto alla logica proposizionale classica.