Principi di progettazione di algoritmi

Lezione 3 di Fondamenti di informatica

Docente: Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2009-10

Indice

correttezza, semplicità, efficienza

principali criteri di **qualità** degli algoritmi

correttezza: *conditio sine qua non*
semplicità: utile a dimostrare la correttezza
efficienza: utile in pratica per la **scalabilità**

il primo esercizio della lezione precedente suggerisce un promettente metodo di sviluppo di algoritmi per la soluzione di problemi di una certa complessità:

partendo dalla descrizione del problema, ideare una soluzione ad alto livello di **astrazione**, in cui cioè si assuma che l'esecutore possa eseguire come primitive operazioni complesse, preoccupandosi solo che siano ben definite (e utili ;)
procedere poi al **raffinamento** dell'algoritmo, affrontando il problema della realizzazione delle operazioni che, considerate primitive in prima approssimazione, risultano non esserlo per le effettive capacità dell'agente di calcolo

a ben vedere, la realizzazione di ciascuna delle operazioni da considerare nella fase del raffinamento costituisce a sua volta un problema al quale si cerca un soluzione algoritmica... si può dunque **reiterare** il metodo a ciascuno dei problemi della seconda fase, abbassando gradualmente il livello di astrazione in successivi passi di raffinamento, finché non rimane alcuna operazione che non sia effettivamente eseguibile

efficienza o semplicità?

legge di Pareto:

nei sistemi con un numero molto grande di parti
più dell'80% dei fenomeni si deve a meno del 20% di esse
*in grandi sistemi software, l'efficienza di **alcuni** algoritmi (<20%)*
è di cruciale importanza per le prestazioni del sistema

efficienza di algoritmi ≠ efficienza di codifica

*... la prima è molto più **redditizia!***

efficienza e semplicità spesso in **conflitto...** (che fare?)

*combinazione ottimale: **algoritmo efficiente, codifica semplice***

valutazione delle prestazioni di un algoritmo:

***analitica:** può essere difficile, ma è rigorosa*
***empirica:** sopperisce alle difficoltà di analisi*

il problema della connettività

formulazione matematica concisa: problema di

decisione di una relazione di equivalenza finita

cioè, più precisamente:

*date una relazione binaria simmetrica **R**, specificata da un insieme finito di coppie, e una coppia in input,*

*decidere se la coppia appartiene a R^*, la chiusura riflessiva e transitiva di **R**, ossia se, nel grafo non orientato che rappresenta **R**, esiste un cammino che **connette** gli elementi della coppia data*

il problema ha molte **applicazioni** pratiche, ad es.:

***costruzione di reti** (di calcolatori, elettriche, etc.)*

problemi di unificazione
(nella deduzione automatica, implementazione di linguaggi dichiarativi, etc.)

prima variazione sul tema

un algoritmo per il problema proposto può servire, fra l'altro, a risolverne un po' diverso:

input: una sequenza di coppie

si vuole un algoritmo che, per ogni coppia c_n, decida se i suoi elementi sono **connessi da un cammino** nel grafo (non orientato) costruito dalle coppie precedenti $\{c_m \mid m<n\}$:

se lo sono, si passa alla coppia successiva

*altrimenti si produce in **output** c_n*
(e si passa alla coppia successiva)

esempio

in	out
1-3	1-3
2-4	2-4
3-0	3-0
1-0	
4-2	
0-2	0-2
2-1	

altre variazioni sul tema

altre varianti del problema proposto:

più complessa: se la coppia **p-q** è connessa, produrre in output uno dei (o tutti i) modi in cui è connessa

esempio: 4°, 5°, 7° input del precedente

esempio	
in	out
1-0	(1-3-0)
4-2	(2-4)
2-1	(1-3-0-2)

più "semplice" (secondo (Sedgewick, 2002)): date **M** connessioni su **N** oggetti, dire se tutte le coppie di oggetti sono connesse

N.B. è più "semplice" l'output, ma si richiede pur sempre un algoritmo per il problema di decisione enunciato sopra!

idea per la soluzione: ***output = albero di copertura?***
tutte le coppie degli ***N*** *oggetti sono connesse sse l'output dell'algoritmo per la precedente prima variante del problema di connettività consta di* ***N-1*** *coppie*

progetto di soluzioni: operazioni astratte

idea essenziale: rappresentare le **componenti connesse** del grafo, cioè le classi di equivalenza di R^*

ogni nodo **p** del grafo appartiene a una e una sola componente connessa: C_p

operazione ***find****: determina* C_p*, dato* **p**

connettere due nodi fra i quali non c'è cammino nel grafo ne "fonde" le rispettive componenti connesse:

operazione ***union****: unisce le componenti connesse* C_p, C_q

operazioni astratte facilmente **riusabili** per molti altri problemi

soluzione astratta alla prima variante del problema:

per ogni coppia p-q in input:

$C_p \leftarrow$ *find(p)*, $C_q \leftarrow$ *find(q)*,

se $C_p \neq C_q$ *allora* ***union***(C_p, C_q)***, output p-q***

algoritmo *quick-find*

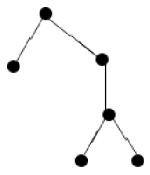
un algoritmo **semplice** (non troppo: non richiede memorizzazione di tutte le coppie in input)
si abbiano **N** nodi: quale struttura dati concettuale di supporto all'algoritmo, introduciamo una sequenza di variabili id_i (i=1,...,N) che soddisfi l'**invariante:**

se $c_n = p\text{-}q$ *è la* n*-sima coppia in input, allora* $id_p = id_q$ *sse* $C_p = C_q$ *nel grafo costruito dalle coppie precedenti* $\{c_m \mid m<n\}$

inizializzazione: $id_i \leftarrow i,\ 1 \le i \le N$
implementazione di ***union***(C_p,C_q) :
$t \leftarrow id_p$; per $1 \le i \le N$: se $id_i = t$ allora $id_i \leftarrow id_q$
implementazione di ***find(p)*** : immediata, grazie all'**invariante**
efficienza dell'algoritmo *quick-find* : non entusiasmante ...
esegue almeno **MN** istruzioni, per **M** operazioni di ***union***

strutture dati astratte: sequenze, alberi

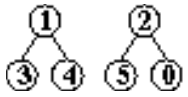
cosa è esattamente una sequenza?
non un "insieme totalmente ordinato", perché ogni elemento di un insieme vi occorre una sola volta, mentre in una sequenza se ne possono avere più occorrenze
una sequenza è una **funzione**, definita su un dominio (totalmente ordinato) di **indici**
le sequenze sono strutture dati frequenti negli algoritmi; lo sono anche gli **alberi:**
esempi: organigrammi, sistemi di file, strutture di libri, alberi sintattici, termini,...
naturalmente associati allo sviluppo di algoritmi per raffinamenti successivi
cosa è esattamente un albero?
albero libero: grafo (non orientato) connesso privo di cicli
equivalentemente: grafo in cui esiste un unico cammino fra ogni coppia di vertici
albero (radicato): albero con un vertice designato, detto **radice**
sebbene il grafo di un albero sia generalmente non orientato, la designazione di un vertice radice induce naturalmente un ordinamento parziale dei vertici, grazie all'assenza di cicli, dunque un orientamento degli archi
$m<n$ se **m** precede **n** nel cammino dalla radice a **n**
terminologia: **padre**, **figli**, **foglie**, **sottoalbero**, ...



algoritmo *quick-union*

alberi nella sequenza **id** nell'esecuzione di **quick-find**: ne sono radici i **punti fissi** della funzione **id**, cioè gli **n** tali che $id_n = n$

input: 3-4, 4-1, 5-2, 0-2



possiamo modificarli per una più efficiente esecuzione di **union**

nuovo **invariante:** ($id^{\omega}p$: radice dell'albero a cui appartiene **p**)

$C_p = C_q$ *nel grafo costruito dalle coppie precedenti* **p-q** *sse* $id^{\omega}p = id^{\omega}q$

inizializzazione: come in **quick-find**

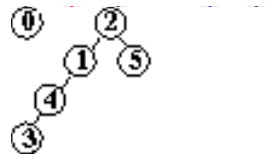
implementazione di **find(p)**

si complica: $i \leftarrow id^{\omega}p$

implementazione di **union**(C_p,C_q)

immediata: $id_i \leftarrow id_j$

input: 3-4, 4-1, 5-2, 3-5



efficienza dell'algoritmo **quick-union** : non sempre buona, può dover eseguire più di **MN/2** istruzioni (per **N** nodi e **M** coppie in input), se **M>N**

algoritmo *quick-union pesata*

quick-union : cammini lunghi da foglia a radice, anche fino a **N-1** passi

(!) possiamo intervenire su questo per ottenere una **find** *più rapida*

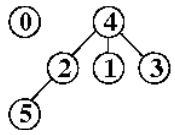
l'invariante di **quick-union** permane, ma fra due nodi $id^{\omega}p \neq id^{\omega}q$ da connettere per **union**, manteniamo la **radice dell'albero più grande** per tener traccia della dimensione dell'albero che nella sequenza **id** sottende ciascun nodo, usiamo una sequenza ausiliaria sz_i , i = 1,...,**N**

inizializzazione: come in **quick-union**, ma estesa alla sequenza ausiliaria **sz**

implementazione di **find(p)** : invariata

implementazione di **union**(C_p,C_q) : si complica un po' per tener conto di, e aggiornare, **sz**

input: 3-4, 4-1, 5-2, 3-5



efficienza di **quick-union pesata** : molto migliore della precedente, per la riduzione della lunghezza dei cammini, proporzionale non più a **N** bensì a **lg N**, anche nel caso peggiore

prospettiva metodologica

che "**lezione di metodo**" trarre dallo studio condotto sul problema della connettività?

punti salienti dello schema di studio degli algoritmi **union-find:**

- specifica **chiara** ed **esatta** dell'**enunciato del problema**
- **analisi dell'enunciato**
  - *per l'identificazione delle **operazioni astratte** intrinseche del problema*
- sviluppo di un **primo algoritmo**
  - ***semplice**, di immediata correttezza in termini delle **operazioni astratte***
- implementazione **semplice** in un **primo programma**
  - *con una codifica delle operazioni astratte su **strutture dati** atte allo scopo*
- miglioramento dell'efficienza per **raffinamenti successivi**
  - *valutandone l'efficacia con **analisi formali e/o valutazioni empiriche***
- **uso di rappresentazioni astratte** di strutture dati e algoritmi impiegati
  - *per la **progettazione ad alto livello** delle successive versioni*
- **analisi prestazionale** (caso peggiore e medio) *per trarne **garanzie di efficienza***