Completezza e compattezza della logica predicativa

Lezione 16 di Fondamenti di informatica

Docenti: Marina Madonia & Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2008-09

Indice

tableau analitici

problema tradizionale della logica: determinare **forme di ragionamento** valide indipendentemente dalle interpretazioni

obiettivo: costruzione di **algoritmi deduttivi**

il metodo dei **tableau analitici** permette di determinare algoritmicamente tutte le verità logiche predicative

cos'è un **tableau analitico?** un albero (tanto per cambiare ;)

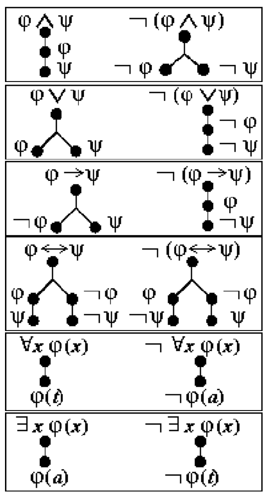
i nodi sono etichettati da **formule predicative**

proprietà semantica: se in un modello vale la formula alla radice, vi devono valere anche tutte le formule di **almeno un ramo** dell'albero (fino alla foglia)

proprietà sintattica: **complessità logica** degli schemi **decrescente** (non strettamente) lungo il cammino dalla radice alla foglia

regole di costruzione: v. appresso (alcune espresse da alberi: **regole tableau**)

deduzione predicativa con tableau



sia Φ una teoria predicativa: un Φ-tableau è un albero con radice etichettata da una formula di Φ, e successivamente costruito applicando ad ogni passo a una foglia f dell'albero una delle seguenti **regole di costruzione:**

introduzione: figlio di f etichettato da una formula di Φ

ricopiatura: figlio di f con l'etichetta di un antenato di f

regole tableau: se l'etichetta di f è un'istanza di quella della radice di una regola tableau, si rimpiazza f con l'istanza della regola

doppia negazione: se f ha etichetta $\neg\neg\psi$: figlio di f con ψ

congruenza: se l'etichetta di f è della forma $t_1 = t_2$, e un antenato di f ha etichetta $\chi(t_i)$, con $i \in \{1,2\}$: figlio di f etichettato da $\chi(t_j)$, con $j \in \{1,2\}$, $j \neq i$

chiusura: se ψ è l'etichetta di f, e un suo antenato ha etichetta $\neg\psi$: figlio di f con etichetta $\perp$

N.B. t, t_i indicano termini chiusi **qualsiasi**, mentre a è una costante individuale univocamente determinata dalla formula: **testimone** della formula, o **costante di** ***Henkin***)

esempio: un cappello universale

esiste qualcuno che se è C (con il cappello) allora tutti sono C

$\vdash \exists x(Cx \to \forall y\, Cy)$

si dimostra per **refutazione** del contrario:

1. $\neg\exists x(Cx \to \forall y\, Cy)$
2. $\neg(Ca \to \forall y\, Cy)$
3. Ca
4. $\neg\forall y\, Cy$
5. $\neg Cb$
6. $\neg(Cb \to \forall y\, Cy)$
7. Cb
8. $\neg\forall y\, Cy$
9. $\perp$

correttezza e decidibilità

un Φ-tableau è **chiuso** se tutti i suoi rami terminano in foglie di etichetta $\perp$

dalla teoria predicativa Φ si deduce la formula ψ con il metodo dei tableau se esiste un $\Phi\cup\{\neg\psi\}$-tableau chiuso

la deduzione $\Phi \vdash_T \psi$ è **refutativa**

correttezza: $\Phi \vdash_T \psi \Rightarrow \Phi \vDash \psi$

poiché ogni teoria che abbia un tableau chiuso è insoddisfacibile

tuttavia, un tableau predicativo può ben essere infinito ... è sempre possibile stabilire se si chiude o meno?

no! $\Rightarrow$ la validità logica predicativa è **indecidibile**

ciò non toglie che esistano teorie predicative decidibili: ma non tutte lo sono!

la validità logica proposizionale è decidibile: perché? (v. esercizio 2)

completezza predicativa

l'indecidibilità della validità logica predicativa non è delle peggiori... vale la sua **semidecidibilità**, per la **completezza** della deduzione col metodo dei tableau:

$\Phi \models \psi \Rightarrow \Phi \vdash_T \psi$

schema essenziale della dimostrazione: si definiscono i seguenti **concetti:**

insieme di Hintikka di dominio $\boldsymbol{D}$ (che include le costanti di Σ): un insieme di $\Sigma(\boldsymbol{D})$-formule predicative "chiuso rispetto alle regole tableau" e che non contiene alcuna formula assieme alla sua negata

Φ-tableau sistematico: ottenuto dalla teoria Φ per applicazione esaustiva delle regole di costruzione

quindi si dimostra che:

ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile, cioè ha un modello

Φ è tableau-consistente (*i.e.* non ha tableau chiusi) $\Rightarrow$ il suo tableau sistematico ha un ramo che include Φ ed è un insieme di Hintikka

per i dettagli si veda sez. 2.5 del testo (Manca, 2001)

finitezza e compattezza

per la deduzione predicativa basta sempre una **parte finita** della teoria data:

$\Phi \models \psi \Rightarrow \Delta \models \psi$ per qualche $\Delta \subseteq \Phi$, Δ finito

questo si può considerare come il "corollario deduttivo" (v. esercizio 3) del teorema di **compattezza della logica predicativa:**

una teoria predicativa è soddisfacibile sse lo è ogni sua parte finita

che a sua volta è conseguenza quasi immediata della correttezza e completezza della deduzione con il metodo dei tableau, tenendo conto del fatto che ogni tableau chiuso è finito

forme di Skolem

una formula predicativa è in **forma prenessa** se consta di una sequenza di quantificazioni, il **prefisso**, seguita da una formula priva di quantificatori, la **matrice**

ogni formula predicativa ne ha una logicamente equivalente in forma prenessa

l'**equisoddisfacibilità** di formule, come pure di teorie, è una relazione molto meno restrittiva dell'equivalenza logica: non richiede che la segnatura sia la stessa

ciò è utile a definire trasformazioni in forme normali equisoddisfacibili

ogni enunciato predicativo ψ in forma prenessa può essere trasformato in uno equisoddisfacibile, Skolem(ψ), privo di quantificatori esistenziali: la **Skolemizzazione** rimpiazza le variabili esistenzialmente quantificate con

- simboli di costante (di Skolem), se il quantificatore non è preceduto da quantificatori universali nel prefisso
- termini $f(x_1,\ldots,x_k)$, se il quantificatore è preceduto da k quantificatori universali nel prefisso, dove f è detta **funzione di Skolem** e i suoi argomenti sono le precedenti k variabili universalmente quantificate

quantificazione universale implicita delle variabili in una forma di Skolem
+ rappresentazione in CNF della matrice → equivalente **rappresentazione a clausole**

espansione di Herbrand

Skolem(Φ) : l'insieme delle forme di Skolem delle forme prenesse ottenute da formule dell'insieme Φ

Σ^*_Φ : la segnatura di **Skolem**(Φ), estesa con un simbolo di costante qualora **Skolem**(Φ) sia privo di tali simboli

universo di Herbrand della teoria Φ:

l'insieme dei termini chiusi di segnatura Σ^*_Φ

espansione di Herbrand della teoria Φ, **Herbrand**(Φ) :

la teoria proposizionale ottenuta da **Skolem**(Φ) istanziandone in tutti i modi possibili le variabili con termini del suo universo di Herbrand

fatto notevole: Φ e **Herbrand**(Φ) sono equisoddisfacibili

esercizi

1. La definizione di tableau chiuso data qui corregge una svista nel testo (Manca, 2001), dove secondo la Def. 2.9 " un tableau si dice chiuso se in esso tutte le foglie sono etichettate con $\perp$" (che si tratti di una svista è testimoniato dalla dimostrazione della Prop. 2.10 nello stesso testo): spiegare perché, se tale ne fosse la definizione, si potrebbe arguire l'esistenza di tableau chiusi soddisfacibili (produrne uno di esempio a tal fine).
2. Dimostrare che un tableau relativo ad una formula proposizionale è sempre finito, e dunque si può sempre decidere se è chiuso o meno.
3. Dimostrare che la finitezza deduttiva della logica predicativa consegue dalla sua compattezza.