

Logica proposizionale, completezza e compattezza

Lezione 15 di Fondamenti di informatica

Docenti: Marina Madonia & Giuseppe Scollo

Università di Catania

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2008-09

Indice

1. Logica proposizionale, completezza e compattezza
2. sintassi e semantica proposizionale
3. principi di logica proposizionale
4. forme normali proposizionali
5. algebra di Lindenbaum-Tarski
6. compattezza della logica proposizionale
7. esercizi

sintassi e semantica proposizionale

la logica proposizionale è una forma (molto) ristretta di logica predicativa

sintassi:

formule atomiche: solo simboli proposizionali, altrimenti detti
variabili proposizionali

connettivi: solo quelli **Booleani**, i quantificatori sono esclusi

semantica:

restrizione della semantica predicativa: un **modello proposizionale** è
essenzialmente una **valutazione booleana** delle variabili proposizionali

nonostante tanta semplicità, la logica proposizionale presenta problemi
computazionalmente difficili

e.g., per stabilire la **soddisfacibilità** di una formula proposizionale
occorre un tempo di calcolo **esponenziale** nel numero delle variabili

principi di logica proposizionale

principio di **sostituzione** proposizionale:

$$\models \varphi(P) \Leftrightarrow \models \varphi(\psi)$$

principio di **congruenza** proposizionale:

$$\models \psi \Leftrightarrow \chi \Leftrightarrow \models \varphi(\psi) \Leftrightarrow \varphi(\chi)$$

siano: φ^* : la formula ottenuta da φ per scambio di $\wedge$ con $\vee$ e viceversa

$\varphi(\neg)$: la formula ottenuta da φ rimpiazzando gli atomi con i negati

principio di **dualità** proposizionale:

$$\models \varphi^* \Leftrightarrow \models \neg \varphi(\neg)$$

teorema di **deduzione** proposizionale:

$$\varphi \models \psi \Leftrightarrow \models \varphi \rightarrow \psi$$

def.: **equivalenza proposizionale**: $\varphi \equiv \psi$ se le due formule hanno
ugual valore di verità per ogni valutazione booleana delle variabili

principio di **equivalenza** proposizionale: $\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow \models \varphi \Leftrightarrow \psi$

forme normali proposizionali

memo: **letterale**: formula atomica o negazione di formula atomica

forma normale disgiuntiva (DNF): disgiunzione di congiunzioni di letterali

forma normale congiuntiva (CNF): congiunzione di disgiunzioni di letterali

fatto: ogni formula proposizionale ha equivalenti DNF e CNF

idea di dimostrazione:

per la DNF, formare una matrice delle valutazioni booleane che rendono vera la formula; associare ogni riga ad una congiunzione di letterali, in cui il segno di ciascun letterale corrisponde al valore assegnato alla variabile dalla valutazione booleana della riga associata

per la CNF, si sfrutti il principio di dualità proposizionale

che forme normali possono avere le **tautologie**? e le formule **insoddisfacibili**?

algebra di Lindenbaum-Tarski

qualsiasi sistema di assiomi completo per le algebre di Boole fornisce un **calcolo deduttivo completo** per la logica proposizionale

infatti, gli assiomi Booleani bastano a trasformare ogni formula in una equivalente DNF, che determina la tavola di verità della formula

dagli assiomi di Boole si deriva $\varphi = \psi$ sse $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, e $\varphi = 1$ sse $\models \varphi$
possiamo costruire un'algebra Booleana delle formule proposizionali, dove si identifichino formule equivalenti? (**semantica algebrica**)

l'**algebra di Lindenbaum-Tarski** è una tal costruzione; fissato un insieme V di variabili proposizionali:

dominio: il quoziente dell'insieme delle formule proposizionali con variabili in V per la relazione di equivalenza proposizionale

operazioni booleane sulle classi di equivalenza: definite per il tramite dei connettivi proposizionali su rappresentanti delle classi

si veda in proposito l'esercizio 3

compattezza proposizionale

una proprietà fondamentale della logica predicativa, che qui consideriamo per il suo frammento proposizionale, è la **compattezza**:

un insieme numerabile di formule proposizionali è soddisfacibile sse lo è ogni suo sottoinsieme **finito**

una direzione della doppia implicazione è ovvia... l'altra no: asserisce che dall'esistenza di **modelli** (magari diversi) delle parti **finite** di un insieme Ψ di formule consegue l'esistenza di un modello di **tutte** le formule di Ψ (infinito): perché crederci?

per il **lemma di König**: ogni albero finitario infinito ha qualche ramo infinito questo serve nell'ipotesi che l'insieme V delle variabili proposizionali di Ψ sia infinito (numerabile); in caso contrario basta molto meno (v. esercizio 4)

se V non è finito, siano $V_1, \dots, V_n, \dots$ e $\psi_1, \dots, \psi_n, \dots$ risp. denumerazioni di V e Ψ ; costruiamo un albero binario ordinato dove:

cammini distinti dalla radice a vertici di livello n rappresentano valutazioni booleane distinte delle variabili $V_1, \dots, V_n$, tali da soddisfare $\psi_1, \dots, \psi_n$

il ramo infinito che, per il lemma di König, tale albero deve avere, dà una valutazione booleana di V che soddisfa Ψ

esercizi

- Determinare DNF e CNF equivalenti delle seguenti proposizioni:
 - $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$
 - $(A \leftrightarrow B) \rightarrow (B \leftrightarrow A)$
 - $B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
- Se una proposizione su n variabili ha una CNF equivalente in cui $k \leq n$ congiunti sono singoli letterali su variabili proposizionali tutte distinte, allora la proposizione può essere soddisfatta da al più 2^{n-k} valutazioni booleane distinte. Perché?
- Le operazioni dell'algebra di Lindenbaum-Tarski sono definite per il tramite di rappresentanti delle classi di equivalenza argomento, ad es. se Λ^L interpreta Λ in tale algebra, e $[\varphi]_L$ è la classe di equivalenza della proposizione φ , allora $[\varphi]_L \wedge^L [\psi]_L = [\varphi \wedge \psi]_L$, e similmente per le altre operazioni. Spiegare perché tale definizione è ben posta, ovvero non dipende dai rappresentanti φ, ψ .
- Si dimostri per assurdo la validità del teorema di compattezza proposizionale nel caso che l'insieme V delle variabili proposizionali dell'insieme Ψ sia finito.
Suggerimento: mostrare che l'ipotesi assurda e la finitezza dell'insieme delle valutazioni booleane permettono di costruire un sottoinsieme finito insoddisfacibile di Ψ .