Elementi di analisi degli algoritmi

Lezione 4 di Fondamenti di informatica

Docenti: Marina Madonia & Giuseppe Scollo

Università di Catania
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Informatica, I livello, AA 2008-09

Indice

motivazioni per l'analisi degli algoritmi

a che serve l'analisi delle prestazioni degli algoritmi:

- confrontare algoritmi diversi per uno stesso problema
- stimare le prestazioni di algoritmi indipendentemente dal linguaggio di programmazione e dall'ambiente operativo
- ottimizzare eventuali parametri degli algoritmi

cosa serve per l'analisi delle prestazioni degli algoritmi:

- alcuni (pochi) concetti matematici fondamentali (v. appresso)
- analisi disponibili in letteratura per algoritmi di ampia applicabilità

problemi inerenti dell'analisi degli algoritmi:

- stima approssimata (quella esatta può essere difficile)
- algoritmi diversi possono avere prestazioni incomparabili (ad es. con ampie e diverse fluttuazioni al variare dell'input)

quali analisi sono rilevanti:

- **caso medio:** si assume che l'input sia generato casualmente
- **caso peggiore:** analizzare algoritmo e **dati**, per determinare l'input appropriato

prestazioni della ricerca sequenziale

consideriamo l'algoritmo di ricerca di un nome in un elenco visto in una lezione precedente

per vedere come il tempo impiegato dall'algoritmo dipenda dalla **dimensione** dell'input (numero di elementi nell'elenco), basta considerare solo il ciclo

riguardo alla dipendenza dal **valore** dell'input, dobbiamo considerare due casi

- o il nome è nell'elenco: **esito positivo**
- o si esaurisce lo spazio di ricerca: **esito negativo**

se l'elenco ha N nomi, è facile vedere che la ricerca sequenziale esamina **mediamente** :

- **N** elementi in caso di esito negativo
- all'incirca **N/2** elementi in caso di esito positivo
  - esattamente: **(N+1)/2**

la ricerca sequenziale esamina sempre **N** elementi **nel caso peggiore**, in qualsiasi esito

velocità di crescita delle funzioni

assunto: dipendenza delle prestazioni dell'algoritmo da un **parametro primario N**
(uno solo, per semplicità e senza perdita di generalità)

il tempo di esecuzione ("costo" più significativo degli algoritmi nella maggior parte dei casi) tipicamente cresce come una delle seguenti funzioni di **N**, e la rispettiva crescita si dice:

1 : costante (crescita zero)

log N : logaritmica

N : lineare

N log N : poco più che lineare ("linearitmica"?)

N^2 : quadratica

N^3 : cubica

2^N : esponenziale

algoritmo di ricerca binaria

nell'esempio precedente, non c'è alternativa alla ricerca sequenziale se l'elenco non è ordinato

se l'elenco dei nomi è ordinato (in un qualsiasi ordinamento totale), la prestazione **media** della ricerca sequenziale può migliorare **nel caso di esito negativo**, arrestando l'esecuzione del ciclo quando l'elemento confrontato con il nome dato è maggiore di questo (se l'ordine è ascendente)

la prestazione **media** eguaglia in tal caso quella dell'esito positivo
il costo computazionale della ricerca sequenziale è comunque **lineare**

se l'elenco è ordinato, si può fare (molto) meglio!

l'idea dell'**algoritmo di ricerca binaria** è la seguente:

si esegue il primo confronto con l'elemento in **posizione centrale** (o quasi, se N è pari) nell'elenco
se il confronto ha esito negativo, si riapplica lo stesso procedimento
al semielenco superiore, se l'elemento centrale è minore del nome dato
al semielenco inferiore altrimenti

prestazioni della ricerca binaria

la ricerca binaria, ad ogni passo con esito negativo **dimezza** la dimensione dello spazio di ricerca nel passo successivo

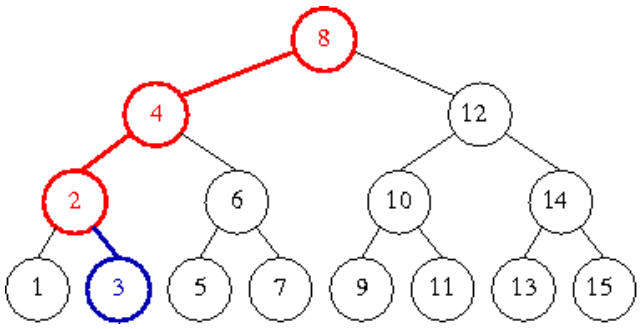
ne consegue che il costo computazionale della ricerca binaria è proporzionale a **lg N** (anche nel caso peggiore)

il **guadagno di efficienza** rispetto alla ricerca sequenziale è **esponenziale!**

come nel caso dell'algoritmo di quick-union pesata, il guadagno di efficienza è dovuto all'operare lungo un cammino, in questo caso da radice a foglia, di un **albero bilanciato**, di altezza logaritmica rispetto al numero dei nodi

a mo' di esempio, l'albero in figura rappresenta le opzioni disponibili alla ricerca binaria di un numero nell'elenco ordinato dei numeri da 1 a 15, ed il cammino in rilievo mostra le scelte fatte per la ricerca di 3

albero di ricerca binaria dei numeri da 1 a 15



proprietà della funzione logaritmo

definizione: funzione inversa dell'esponenziale
ovvero, $\log_b x$ è l'esponente da dare a **b** per ottenere **x** :

$b^{\log_b x} = x$

$\log_b b^x = x$

dalla definizione discendono le proprietà:

reciprocità : $\log_b a = 1 / \log_a b$

additività : $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$, $\log_b (x / y) = \log_b x - \log_b y$

notazione per **basi speciali:**

logaritmo naturale : $\ln x = \log_e x$

logaritmo binario : $\lg x = \log_2 x$

un'applicazione delle approssimazioni intere del logaritmo binario:

per la codifica binaria di N+1 oggetti distinti occorrono $\lfloor \lg N \rfloor + 1 = \lceil \lg(N+1) \rceil$ bit

un algoritmo di ordinamento

le prestazioni della ricerca binaria sono rese possibili dall'ipotesi che lo spazio di ricerca sia ordinato

> qual è il costo computazionale di un algoritmo di ordinamento? dipende dall'algoritmo... ;)

un semplice algoritmo di ordinamento può usare come primitiva una vecchia conoscenza: una funzione di ricerca del massimo in un insieme, per la quale già disponiamo di un algoritmo

nel nostro caso occorre però un algoritmo un po' diverso, perché vogliamo ordinare una **sequenza data**, non necessariamente di numeri, e ci serve una funzione che ci dia la **posizione** (ad es., della prima occorrenza) del massimo elemento trovato nella sequenza

tali adattamenti sono proposti come esercizi, assieme ad altri raffinamenti del seguente algoritmo di ordinamento, in cui $A = A_1 \ldots A_N$ è la sequenza data, e adoperiamo il termine **procedura**, invece di **funzione**, per indicare un algoritmo che può modificare i dati che riceve in ingresso

```
procedura ordina (A)
finale ← lunghezza(A)
finché finale > 1 ripeti:
    m ← posizione_massimo(A, finale)
    scambia(A, m, finale)
    finale ← finale - 1
fine ciclo
```

analisi dell'algoritmo di ordinamento

possiamo ora rispondere al quesito posto all'inizio della pagina precedente, con riferimento all'algoritmo appena visto, ragionando come segue:

> basta considerare il costo computazionale del ciclo
>
> il ciclo, valutazione della condizione inclusa, viene eseguito N volte
>
> in ciascuna iterazione, tutte le operazioni eseguite hanno costo costante (indipendente da N), tranne la funzione **posizione_massimo**, che determina la posizione del massimo nella parte non ancora ordinata della sequenza
>
> **posizione_massimo** alla k-sima iterazione esegue N-k confronti, dunque il suo costo totale è **quadratico**, mentre il costo totale delle altre operazioni del ciclo è **lineare**
>
> ne consegue che il costo computazionale dell'algoritmo è **quadratico**

sorgono spontanee due domande:

1. il costo dell'ordinamento non vanifica il guadagno di efficienza dato dalla ricerca binaria?
2. non esistono algoritmi di ordinamento (decisamente) più efficienti?

rispondiamo nell'ordine:

1. no, se la ricerca va eseguita **molte volte** sulla sequenza data: l'ordinamento è in tal caso un "investimento", il cui costo viene ammortizzato sulle numerose esecuzioni della ricerca
2. sì, sono noti algoritmi di ordinamento di costo proporzionale a $N \lg N$

limitazione asintotica di funzioni

che vuol dire **esattamente** che una funzione è un'**approssimazione asintotica** di un'altra?

la notazione O grande designa una **limitazione asintotica** della velocità di crescita:

def. : $g(N)$ è $O(f(N))$ se esistono costanti c e N_0 tali che $g(N) < cf(N)$ per ogni $N>N_0$

utilità della notazione O grande:

approssimazione in espressioni matematiche
ignorare i termini più piccoli
approssimazione nella stima di prestazioni di algoritmi e programmi
ignorare le parti meno significative
classificazione degli algoritmi
in termini di limiti superiori al tempo di calcolo

discendono direttamente dalla definizione molte proprietà della notazione O grande che permettono spesso di manipolarne le espressioni "come se la O non ci fosse", ad esempio:

$O(k) = O(1)$ e $kO(f(N)) = O(kf(N)) = O(f(N))$, per ogni costante k,
$O(f(N)) + O(g(N)) = O(f(N)+g(N))$, $O(f(N))O(g(N)) = O(f(N)g(N))$

approssimazione asintotica di funzioni

la limitazione asintotica espressa dalla notazione O grande non è sufficiente a **caratterizzare** la velocità di crescita

ad esempio: kN è $O(N^2)$ ma ha crescita lineare, non quadratica

la notazione $\approx$ (letta "**all'incirca**") designa l'**approssimazione asintotica** di una funzione con un'altra:

def. : $f(N) \approx g(N)$ se $f(N) = g(N)+h(N)$ e $h(N)/g(N) \to 0$ per $N \to \infty$

per caratterizzare **solo la velocità di crescita** l'approssimazione asintotica chiede troppo... basta invece il seguente concetto

la notazione $\propto$ (letta "**proporzionale a**") designa la **proporzionalità asintotica** di una funzione ad un'altra:

def. : $f(N) \propto g(N)$ se esiste una costante c tale che $f(N) \approx cg(N)$

complessità di algoritmi e di problemi

finora si sono considerate stime e analisi delle prestazioni di **algoritmi** per un dato problema, o classe di problemi, e per essi risulta utile distinguere fra

> **caso peggiore :** l'analisi delle prestazioni in tal caso fornisce **garanzie** sul costo computazionale dell'algoritmo
>
> **caso medio :** l'analisi delle prestazioni in tal caso fornisce una **stima** del costo computazionale mediamente atteso

per complessità computazionale di un **problema** si intende:

> il costo computazionale nel caso peggiore del miglior algoritmo per quel problema

il costo computazionale nel caso peggiore di un algoritmo per un dato problema costituisce un **limite superiore** alla complessità computazionale del problema:

> il costo del miglior algoritmo non può superare quello di qualsiasi algoritmo

è anche utile determinare **limiti inferiori** alla complessità computazionale di problemi, analizzandone caratteristiche inerenti, ma questo compito è di solito più difficile

esercizi

1. assumendo che il file in ingresso sia un elenco di nomi in ordine alfabetico, modificare la descrizione dell'algoritmo di ricerca sequenziale visto in una lezione precedente, in modo che la ricerca termini con esito negativo quando il valore dell'elemento letto è maggiore del nome cercato
2. si considerino le funzioni $N^{1/2}$, $\lg N$, $N^{3/2}$, $N \lg N$: disporle in ordine ascendente di velocità di crescita
3. dimostrare che $\lfloor \lg N \rfloor + 1 = \lceil \lg(N+1) \rceil$ per ogni intero positivo $N > 0$
4. l'algoritmo di ordinamento visto a lezione usa due primitive:
   - la funzione posizione_massimo(A, n), che restituisce la posizione (indice) nella sequenza A del massimo fra i suoi primi n elementi
   - la procedura scambia(A, i, j), che scambia di posto gli elementi alle posizioni i, j nella sequenza A

   descrivere in pseudocodice algoritmi per tali astrazioni