Simulazione discreta di sistemi dinamici con sistemi di riscrittura, finitari e non

ω-rewriting the 3x+1 problem

Giuseppe Scollo

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania

2 dicembre 2005

Outline

Sistemi dinamici di transizioni di stato

...dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
  - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
  - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (*a.o.*) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
  - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.: [(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
  - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
  - quando la dinamica dipende da numerose variabili
  - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
  - attraverso sistemi di riscrittura
  - anche in sistemi di calcolo parallelo

Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- dinamica stati-transizioni (ST): (S, q)
  - S : spazio (discreto) degli stati
  - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: dinamica [totale] di transizione
  - $x \rightarrow y \stackrel{def}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
  - $q(X) \stackrel{def}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai quasistati $X \subseteq S$
- orbita : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i.\ X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita ultimamente periodica di origine X :
  $\exists k \geq 0\ \exists n > 0.\ q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita periodica se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) inclusa in un'altra: $(\exists i \geq 0.)\forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- s-traiettoria : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0.\ \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
  - s-volo $\stackrel{def}{=}$ s-traiettoria iniettiva
  - s-buco nero $\stackrel{def}{=}$ s-volo t.c. $q^\star(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$

Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- bacino $B : \emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B . q(s) \subseteq B$
- A è un attracting set potenziale di B
  se $\forall s \in B . \exists z . s \rightarrow^{\star} z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^{ω}
- A è un attracting set inevitabile di B
  se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^{ω}
- attrattore potenziale di B : attracting set potenziale di B minimale rispetto a $\subseteq$
- attrattore inevitabile di B : attracting set inevitabile di B minimale rispetto a $\subseteq$
- $R_{\Diamond} \stackrel{def}{=} \{s \in B | \exists n > 0 . s \rightarrow^{n} s\}$: insieme degli stati ricorrenti in B
- $R_{\Box} \stackrel{def}{=} \{s \in B | \forall m > 0, s' \in B .\ s \rightarrow^{m} s' \Rightarrow \exists n > 0 .\ s' \rightarrow^{n} s\}$:
  insieme degli stati eternamente ricorrenti in B

Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: $A_{\Diamond}$ ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: $A_{\Box}$ ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\Box} = q^{\star}(R_{\Box})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B:
  - Ξ è ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} .\ \xi_k \in q^{\star}(R_{\Diamond})$
  - Ξ è eternamente ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} .\ \xi_k \in R_{\Box}$ (ergo $\forall n \geq k .\ \xi_n \in R_{\Box}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
  - $A_{\Box} = q^{\star}(R_{\Diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
    altrimenti $A_{\Box} = \emptyset$
  - $A_{\Diamond} = R_{\Box}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
    altrimenti $A_{\Diamond} = \emptyset$

Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$CG \longrightarrow GG$

$C \longrightarrow C$

$G \longrightarrow \lambda$

$G \longrightarrow K$

$G \longrightarrow G$

- instabilità dell'agente G: o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando misure relative alle regole

Origini del Problema 3x+1

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- "riscoperto" più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, 3x+1 . . .
- formulazione "ufficiale": sia $f : \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+$ definita da

  $x \longmapsto 3x+1$ se x è dispari

  $x \longmapsto \frac{x}{2}$ se x è pari

  è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?

  ovvero che $f^\star$ ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- "Mathematics is not yet ready for such problems" (Erdös)

Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$

 d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'

- **restrizione** ai naturali **dispari:** $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di 3x+1)

 qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
 `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow`

- **“storie”** delle traiettorie, *aka* *parity vectors:*

 sequenze binarie infinite $(10^{k_i-1}|i>0)$
 (i: ordinale della transizione nella traiettoria)

 hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
 (Terras: **`http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html`**)

Estensioni e generalizzazioni del Problema 3x+1

- estensioni: del dominio, senza cambiare la regola

 studiate in letteratura: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \ldots$

- generalizzazioni: della regola, per **classi** di funzioni

 ad esempio:

 - $x \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod 2$
 $x \mapsto \lceil \beta \cdot x \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

 - $x \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod d$
 $x \mapsto \frac{m \cdot x - r}{d}$ altrimenti,

 con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod d, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli $\pmod d$

Stato dell'arte sul Problema 3x+1

- una panoramica (1996) ancora attuale: `http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias`
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999): `http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html`
- una bibliografia aggiornata periodicamente: [Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato: `http://www.ericr.nl/wondrous`

cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo 3x+1

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche. . .
- . . . infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e. . .
- . . . un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)

la dinamica 3x+1 in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\bot, \mathtt{0\_}, \mathtt{1\_}\}$

interpretazione in $\mathbb{N}_+$: $\bot \mapsto 1, \mathtt{0} \mapsto \lambda x.2x, \quad \mathtt{1} \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C-termini modulo $\mathtt{1}\bot = \bot$

stati TRS: $\sigma\#x$, con: $\sigma \in \{0,1\}^*$: storia delle transizioni

x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{\mathtt{t\_}, \mathtt{r\_}, \mathtt{s\_}\}$

- Σ_A-termini
- termini di forma $\sigma\#a$, con a Σ_A-termine

interpretazione in $\mathbb{N}_+$ degli operatori ausiliari:

$\mathtt{t} \mapsto \lambda x.3x, \quad \mathtt{r} \mapsto \lambda x.3x-1, \quad \mathtt{s} \mapsto \lambda x.3x-2$

la dinamica 3x+1 in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

$\mathcal{D}$: regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)
$\mathcal{C}$: regole ausiliarie computazionali (le altre)
$\mathcal{B}$: regole di frontiera ($\bot$ nel pattern)
$\mathcal{A}$: regole non di frontiera (le altre)

$\mathcal{B}_\mathcal{D}$: $\sigma\#\bot \to \sigma\mathtt{1}\#\mathtt{0}\bot$	$\mathcal{A}_\mathcal{D}$: $\sigma\#\mathtt{0}x \to \sigma\mathtt{0}\#x$ $\sigma\#\mathtt{1}x \to \sigma\mathtt{1}\#\mathtt{r}x$

$\mathcal{B}_\mathcal{C}$: $\mathtt{r}\bot \to \mathtt{0}\bot$ $\mathtt{s}\bot \to \bot$ $\mathtt{t}\bot \to \mathtt{10}\bot$	$\mathcal{A}_\mathcal{C}$: $\mathtt{r0}x \to \mathtt{1t}x$, $\mathtt{r1}x \to \mathtt{0s}x$ $\mathtt{s0}x \to \mathtt{0r}x$, $\mathtt{s1}x \to \mathtt{1s}x$ $\mathtt{t0}x \to \mathtt{0t}x$, $\mathtt{t1}x \to \mathtt{1r}x$

la dinamica 3x+1 rivisitata...
...all'origine

- in un ω-TRS, l'equazione sui generatori $\mathtt{1}\bot = \bot$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante $\bot$ con il termine $\mathtt{1}^\omega$
- interpretazione di $\mathtt{1}^\omega$: punto fisso di quella di $\mathtt{1}$
- conseguenza: regole di frontiera superflue!
  (per induzione transfinita)
- ad esempio:

$$\begin{array}{llll} \sigma\#\mathtt{1}^\omega & \rightarrow & \sigma\mathtt{1}\#\mathtt{r1}^\omega & 2^{\mathrm{a}}\text{regola } \mathcal{A}_\mathcal{D} \\ & \rightarrow & \sigma\mathtt{1}\#\mathtt{0s1}^\omega & 2^{\mathrm{a}}\text{regola } \mathcal{A}_\mathcal{C} \\ & \rightarrow^\omega & \sigma\mathtt{1}\#\mathtt{01}^\omega & 4^{\mathrm{a}}\text{regola } \mathcal{A}_\mathcal{C} \ (\omega \text{ volte}). \end{array}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...

interpretazione in $\mathbb{Z}$

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di $\mathtt{0}$
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati
  compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
  - $\mathtt{0}^\omega$ (0)
  - $\mathtt{10}^\omega$ (-1)
  - $\mathtt{1010}^\omega$ (-5,-7,-10)
  - $\mathtt{100010}^\omega$ (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
  - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
  - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)

interpretazione in un'estensione densa di $\mathbb{Z}$

Idea!

che succede se. . . si postula l'esistenza di punti fissi "ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione $\mathcal{I}$ tale che $\forall \pi \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^+ \; \exists (\pi^\omega)^\mathcal{I}$
- affinché $\mathcal{I}$ estenda l'interpretazione in $\mathbb{Z}$, occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+, m \in \mathbb{N}, 0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di $\mathbb{Q}$:

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di $\mathbb{Q}$ è proprio, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è denso. . .

densità dell'estensione

- dimostrazione "diretta". . .

  . . . consultabile, ma sconsigliata ("brutta" ;)
- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

  infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 (\bmod d)$$

  ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d, ergo. . . $\square$
- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].

Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è appena agli inizi

  la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare. . .

- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti "caotici", ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro estensioni al continuo

  sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell'ambito discreto del problema originario

- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della periodicità
  - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di specificabilità finita di termini e riduzioni infinite
  - ad esempio con ω-stringhe quasiperiodiche (Marcus), algoritmicamente generabili, . . .

Panoramica
Collatz-like TRS
Conclusioni
Riferimenti

Conclusioni (2)

Aree di ulteriore ricerca e applicazione

Più **"praticamente":**

- **costruzione** di **modelli simbolici discreti di fenomeni biologici**

- **validazione** di detti modelli su dati sperimentali

- **algoritmi paralleli** per entrambi gli scopi

Giuseppe Scollo Sistemi dinamici in sistemi di riscrittura

Problema 3x+1
Riferimenti bibliografici

M. Chamberland
An Update on the 3x+1 Problem
http://www.math.grinnell.edu/~chamberl/3x.html

J.C. Lagarias
The $3x + 1$ *Problem: An Annotated Bibliography*.
arXiv:math.NT/0309224v4, June 13, 2005.
http://arxiv.org/abs/math.NT/0309224

G. Scollo.
ω-rewriting the Collatz problem.
Fundamenta Informaticae, **64**(1–4):405–416, 2005.
preliminary RR version:
http://www.sci.univr.it/~scollo/papers/dirr0425.pdf

Sistemi dinamici di transizioni di stato
Riferimenti bibliografici

V. Manca, G. Franco, G. Scollo
State transition dynamics: basic concepts and molecular computing perspectives.
Chapter 2 in: M. Gheorghe & M. Holcombe (Eds.)
Molecular Computational Models: Unconventional Approaches
Idea Group, Hershey, PA, USA (2005) 32–55.

H. Jaeger
Dynamic Symbol Systems.
Doctoral dissertation, Universität Bielefeld, D (1994).

Simulazione discreta di fenomeni biologici (1)

Riferimenti bibliografici

- L. Bianco, F. Fontana, G. Franco, V. Manca
P Systems for Biological Dynamics.
in: G. Ciobanu, M.J. Pérez-Jiménez, G. Paun (Eds.)
Applications of Membrane Computing
Springer, Natural Computing Series (2005) 81–126.
- V. Manca, L. Bianco, F. Fontana
Evolution and Oscillation in P Systems: Applications to Biological Phenomena.
in: G. Mauri *et al.* (Eds.) *Membrane Computing*
Springer, LNCS **3365** (2005) 63–84

Panoramica
Collatz-like TRS
Conclusioni
Riferimenti
Problema 3x+1
Sistemi dinamici ST
Simulazione discreta di fenomeni biologici

Simulazione discreta di fenomeni biologici (2)

Riferimenti (work in progress)

- L. Bianco, F. Fontana, V. Manca
Metabolic algorithm with time-varying reaction maps
in: *Proc. BWMC 2005*, 43–62.
- G. Franco
Biomolecular computing – Combinatorial algorithms and laboratory experiments
Doctoral dissertation, Università di Verona, forthcoming (2006).

Giuseppe Scollo
Sistemi dinamici in sistemi di riscrittura