

Simulazione discreta di sistemi dinamici con sistemi di riscrittura, finitari e non

ω -rewriting the $3x+1$ problem

Giuseppe Scollo

**Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Catania**

2 dicembre 2005



Outline

- 1 **Panoramica**
 - Sistemi dinamici ST
 - Il Problema $3x+1$
 - cosa viene appresso
- 2 **Collatz-like TRS**
 - Dinamica $3x+1$ in un TRS finitario
 - Dinamiche $3x+1$ con ω -TRS
 - Un risultato collaterale
- 3 **Conclusioni**
- 4 **Riferimenti**
 - Problema $3x+1$
 - Sistemi dinamici ST
 - Simulazione discreta di fenomeni biologici



Outline

1 Panoramica

- Sistemi dinamici ST
- Il Problema $3x+1$
- cosa viene appresso

2 Collatz-like TRS

- Dinamica $3x+1$ in un TRS finitario
- Dinamiche $3x+1$ con ω -TRS
- Un risultato collaterale

3 Conclusioni

4 Riferimenti

- Problema $3x+1$
- Sistemi dinamici ST
- Simulazione discreta di fenomeni biologici



Outline

- 1 **Panoramica**
 - Sistemi dinamici ST
 - Il Problema $3x+1$
 - cosa viene appresso
- 2 **Collatz-like TRS**
 - Dinamica $3x+1$ in un TRS finitario
 - Dinamiche $3x+1$ con ω -TRS
 - Un risultato collaterale
- 3 **Conclusioni**
- 4 **Riferimenti**
 - Problema $3x+1$
 - Sistemi dinamici ST
 - Simulazione discreta di fenomeni biologici



Outline

- 1 **Panoramica**
 - Sistemi dinamici ST
 - Il Problema $3x+1$
 - cosa viene appresso
- 2 **Collatz-like TRS**
 - Dinamica $3x+1$ in un TRS finitario
 - Dinamiche $3x+1$ con ω -TRS
 - Un risultato collaterale
- 3 **Conclusioni**
- 4 **Riferimenti**
 - Problema $3x+1$
 - Sistemi dinamici ST
 - Simulazione discreta di fenomeni biologici



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
 - utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
 - vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
 - operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (*a.o.*) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Sistemi dinamici di transizioni di stato

... dove tutto è discreto: tempo, spazio degli stati

- *aka* sistemi dinamici simbolici
 - concetti di base (v. appresso): [Manca *et al.*, 2005a]
 - letteratura precedente: [(Jaeger, 1994)]
- utili (a.o.) alla simulazione discreta di fenomeni biologici
 - sistemi a membrane, *P-systems*, etc.:
[(Bianco *et al.*, 2005a), (Manca *et al.*, 2005b)]
 - *work in progress*: [Bianco *et al.*, 2005b, Franco, 2006]
- vantaggiosi rispetto ai modelli continui (eq. differenziali)
 - quando la dinamica dipende da numerose variabili
 - nella modellazione di dinamiche globali
- operazionali, dunque facilmente implementabili
 - attraverso sistemi di riscrittura
 - anche in sistemi di calcolo parallelo



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X_j'$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: dinamica [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X_j'$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s -volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s -bucio nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X_j'$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X_j'$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - **s-volo** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - **s-buco nero** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (ultimamente) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (**ultimamente**) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - **s-volo** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - **s-buco nero** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (**ultimamente**) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - s-volo $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - s-buco nero $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (**ultimamente**) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - **s-volo** $\stackrel{\text{def}}{=} s\text{-traiettoria iniettiva}$
 - **s-buco nero** $\stackrel{\text{def}}{=} s\text{-volo t.c. } q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (1)

orbite, traiettorie, voli, buchi neri, ...

- **dinamica stati-transizioni (ST):** (S, q)
 - S : spazio (discreto) degli **stati**
 - $q : S \rightarrow \mathcal{P}(S)$: **dinamica** [totale] di transizione
 - $x \rightarrow y \stackrel{\text{def}}{=} y \in q(x)$: relazione (binaria) di transizione
 - $q(X) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{s \in X} q(s)$: estensione ai **quasistati** $X \subseteq S$
- **orbita** : $(X_i | i \in \mathbb{N})$ t.c. $\forall i. X_{i+1} = q(X_i)$
- orbita **ultimamente periodica** di origine X :
 $\exists k \geq 0 \exists n > 0. q^{k+n}(X) = q^k(X)$ (orbita **periodica** se $k = 0$)
- orbita (**ultimamente**) **inclusa** in un'altra: $(\exists i \geq 0.) \forall j (\geq i) X_j \subseteq X'_j$
- **s-traiettoria** : $\xi : \mathbb{N} \rightarrow S$ t.c. $\xi(0) = s$ e $\forall i \geq 0. \xi(i) \rightarrow \xi(i+1)$
 - **s-volo** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -traiettoria iniettiva
 - **s-buco nero** $\stackrel{\text{def}}{=} s$ -volo t.c. $q^*(s) \subseteq \xi(\mathbb{N})$



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** $B: \emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale** di B
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile** di B
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale** di B : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile** di B : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Concetti di base dei sistemi dinamici ST (2)

attrattori, ricorrenza, ...

- **bacino** B : $\emptyset \neq B \subseteq S$ t.c. $\forall s \in B. q(s) \subseteq B$
- A è un **attracting set potenziale di B**
 se $\forall s \in B. \exists z. s \rightarrow^* z$. l'orbita di origine z è ultimamente inclusa in A^ω
- A è un **attracting set inevitabile di B**
 se ogni orbita di origine in B è ultimamente inclusa in A^ω
- **attrattore potenziale di B** : attracting set potenziale di B **minimale** rispetto a \subseteq
- **attrattore inevitabile di B** : attracting set inevitabile di B **minimale** rispetto a \subseteq
- $R_\diamond \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \exists n > 0. s \rightarrow^n s\}$: insieme degli stati **ricorrenti** in B
- $R_\square \stackrel{def}{=} \{s \in B \mid \forall m > 0, s' \in B. s \rightarrow^m s' \Rightarrow \exists n > 0. s' \rightarrow^n s\}$:
 insieme degli stati **eternamente ricorrenti** in B



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} : \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è eternamente ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} : \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k : \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST (appena agli inizi. . .)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è eternamente ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k . \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
 altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
 altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi. . .)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è eternamente ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k . \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
 altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
 altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi. . .)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è eternamente ricorrente in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k . \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
 altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
 altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è **ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è **eternamente ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k . \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST (appena agli inizi. . .)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è **ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è **eternamente ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k. \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
 altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
 altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è **ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è **eternamente ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k. \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è **ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è **eternamente ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k. \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un po' di teoria dei sistemi dinamici ST

(appena agli inizi...)

- l'attrattore potenziale di B è unico, quando esiste: A_{\diamond} ($= \emptyset$ se non esiste)
- l'attrattore inevitabile di B è unico, quando esiste: A_{\square} ($= \emptyset$ se non esiste)
- $R_{\square} = q^*(R_{\square})$
- sia $\Xi = (\xi_n | n \in \mathbb{N})$ un volo in un bacino B :
 - Ξ è **ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in q^*(R_{\diamond})$
 - Ξ è **eternamente ricorrente** in B se $\exists k \in \mathbb{N} . \xi_k \in R_{\square}$ (ergo $\forall n \geq k. \xi_n \in R_{\square}$)
- **caratterizzazione degli attrattori:** se $q(s)$ è finito per ogni $s \in B$, allora
 - $A_{\square} = q^*(R_{\diamond})$ se ogni volo in B è ricorrente
altrimenti $A_{\square} = \emptyset$
 - $A_{\diamond} = R_{\square}$ se ogni buco nero in B è eternamente ricorrente
altrimenti $A_{\diamond} = \emptyset$



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow \emptyset$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando *misure relative* alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente G : o muore, o "guarisce" (e diventa immune: K)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando *misure relative* alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- **instabilità** dell'agente **G**: o muore, o "guarisce" (e diventa immune: **K**)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- **transizioni determinabili** associando **misure relative** alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente **G**: o muore, o "guarisce" (e diventa immune: **K**)
- stati : $(|C|+|K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando misure relative alle regole



Un esempio di applicazione a fenomeni biologici

un modello elementare di propagazione epidemica

o, anche, di trasformazione catalitica instabile:

$$CG \rightarrow GG$$

$$C \rightarrow C$$

$$G \rightarrow \lambda$$

$$G \rightarrow K$$

$$G \rightarrow G$$

- instabilità dell'agente **G**: o muore, o "guarisce" (e diventa immune: **K**)
- stati : $(|C| + |K|, |G|)$
- transizioni determinabili associando **misure relative** alle regole



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
- formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
$$x_i \rightarrow \begin{cases} 3x_i + 1 & \text{se } x_i \text{ è dispari} \\ x_i / 2 & \text{se } x_i \text{ è pari} \end{cases}$$
è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
- formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
$$x_i \rightarrow \begin{cases} 3x_i + 1 & \text{se } x_i \text{ è dispari} \\ x_i / 2 & \text{se } x_i \text{ è pari} \end{cases}$$
è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
 - (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
 - “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
 - formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
 - $x_i \rightarrow 3x_i + 1$ se x_i è dispari
 - $x_i \rightarrow \frac{x_i}{2}$ se x_i è pari
- è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
 - (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
 - “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
 - formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
 - $x \mapsto 3x+1$ se x è dispari
 - $x \mapsto \frac{x}{2}$ se x è pari
- è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
- formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
$$x \mapsto 3x+1 \text{ se } x \text{ è dispari}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2} \text{ se } x \text{ è pari}$$

è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
 - (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
 - “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
 - formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
 - $x \mapsto 3x+1$ se x è dispari
 - $x \mapsto \frac{x}{2}$ se x è pari
- è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
- formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
$$x \mapsto 3x+1 \text{ se } x \text{ è dispari}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2} \text{ se } x \text{ è pari}$$
è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
- (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
- “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
- formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
$$x \mapsto 3x+1 \text{ se } x \text{ è dispari}$$
$$x \mapsto \frac{x}{2} \text{ se } x \text{ è pari}$$
è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Origini del Problema $3x+1$

Collatz, etc.

- vagamente oscure: Collatz (1932) propose un *altro* problema (di natura simile, tuttora aperto), tuttavia. . .
 - (ri)proposto da Thwaites (1952), con premio da 1000£
 - “riscoperto” più volte, donde i molteplici nomi: Collatz, Syracuse, Kakutani, Hasse, Ulam, $3x+1$. . .
 - formulazione “ufficiale”: sia $f : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$ definita da
 - $x \mapsto 3x+1$ se x è dispari
 - $x \mapsto \frac{x}{2}$ se x è pari
- è vero che l'iterata di f converge sempre a 1?
ovvero che f^* ha per attrattore il ciclo $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$?
- “Mathematics is not yet ready for such problems” (Erdős)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^{k-1} | j > 0$)
(j : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d’ora innanzi s’intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo ‘ $3x+1$ ’
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt’altro che impeccabili. . . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^k-1 \mid j > 0$)
(j : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^k-1 \mid j > 0$)
(j : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>

- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:

sequenze binarie infinite ($10^{k-1} | i > 0$)

(i : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema

(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- **“storie”** delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^{k_i-1} | i > 0$)
(i : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^{k_i-1} | i > 0$)
(i : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Variazioni sul tema

- formulazione “dimezzata”: rimpiazzare $3x+1$ con $\frac{3x+1}{2}$
d'ora innanzi s'intende tale formulazione del Problema, pur continuando a denominarlo '3x+1'
- **restrizione** ai naturali **dispari**: $x \mapsto \frac{3x+1}{2^k}$
con $k = E_2(3x+1)$ (esponente di 2 nella fattorizzazione di $3x+1$)
qualcuno, di recente, sostiene di avere risolto il Problema in questa variante (argomenti tutt'altro che impeccabili. . . ;)
<http://www-personal.ksu.edu/~kconrow>
- “**storie**” delle traiettorie, *aka parity vectors*:
sequenze binarie infinite ($10^{k_i-1} | i > 0$)
(i : ordinale della transizione nella traiettoria)

hanno proprietà interessanti per la dinamica del sistema
(Terras: <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>)



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni:** del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \dots$
- **generalizzazioni:** della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:

- $x_i \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x_i \mapsto \lceil \beta \cdot \bar{x} \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

- $x_i \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x_i \mapsto \frac{m \cdot x + r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni**: del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 , ...
- **generalizzazioni**: della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:

- $x_i \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x_i \mapsto \lceil \beta \cdot \bar{x} \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

- $x_i \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x_i \mapsto \frac{m \cdot x + r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni**: del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 , ...
- **generalizzazioni**: della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:

- $x_i \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x_i \mapsto \lceil \beta \cdot x \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

- $x_i \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x_i \mapsto \frac{m \cdot x + r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni**: del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \dots$
- **generalizzazioni**: della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:

- $x \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x \mapsto \lceil \beta \cdot x \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

- $x \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x \mapsto \frac{m \cdot x - r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni**: del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 , ...
- **generalizzazioni**: della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:

- $x \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x \mapsto \lceil \beta \cdot x \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)

- $x \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x \mapsto \frac{m \cdot x - r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Estensioni e generalizzazioni del Problema $3x+1$

- **estensioni**: del dominio, senza cambiare la regola studiate in letteratura: \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{Z}_2 , ...
- **generalizzazioni**: della regola, per **classi** di funzioni ad esempio:
 - $x \mapsto \frac{x}{2}$ se $x \equiv 0 \pmod{2}$
 $x \mapsto \lceil \beta \cdot x \rceil$ altrimenti, per $\beta > 1$ (Mignosi)
 - $x \mapsto \frac{x}{d}$ se $x \equiv 0 \pmod{d}$
 $x \mapsto \frac{m \cdot x - r}{d}$ altrimenti,

con $(m, d) = 1, r \in R, m \cdot x \equiv r \pmod{d}, R$ un insieme prefissato di rappresentanti delle classi dei residui non nulli \pmod{d}



Stato dell'arte sul Problema $3x+1$

- una panoramica (1996) ancora attuale:
<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias>
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999):
<http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html>
- una bibliografia aggiornata periodicamente:
[Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato:
<http://www.ericr.nl/wondrous>



Stato dell'arte sul Problema $3x+1$

- una panoramica (1996) ancora attuale:
<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias>
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999):
<http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html>
- una bibliografia aggiornata periodicamente:
[Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato:
<http://www.ericr.nl/wondrous>



Stato dell'arte sul Problema $3x+1$

- una panoramica (1996) ancora attuale:
<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias>
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999):
<http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html>
- una bibliografia aggiornata periodicamente:
[Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato:
<http://www.ericr.nl/wondrous>



Stato dell'arte sul Problema $3x+1$

- una panoramica (1996) ancora attuale:
<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias>
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999):
<http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html>
- una bibliografia aggiornata periodicamente:
[Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato:
<http://www.ericr.nl/wondrous>



Stato dell'arte sul Problema $3x+1$

- una panoramica (1996) ancora attuale:
<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias>
- una più recente (2003): [Chamberland, 2003]
- una conferenza *ad-hoc* (1999):
<http://www.math.grin.edu/~chamberl/conf.html>
- una bibliografia aggiornata periodicamente:
[Lagarias, 2005]
- un sito ricco e frequentemente aggiornato:
<http://www.ericr.nl/wondrous>



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ...un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ...un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ...un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ...un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ...un risultato collaterale (un po' sorprendente :)



cosa viene appresso: un caso di studio

descrizioni simboliche di dinamiche di tipo $3x+1$

- descrizione mediante sistemi di riscrittura di termini (TRS), anche...
- ...infinitari!
- confronto fra le due tecniche (sviluppato in [Scollo, 2005]), e...
- ... un risultato collaterale (un po' sorprendente ;)



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0, 1\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t, r, s\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0, 1\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1$, $0 \mapsto \lambda x.2x$, $1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t, r, s\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x$, $r \mapsto \lambda x.3x-1$, $s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0, 1\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1$, $0 \mapsto \lambda x.2x$, $1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t, r, s\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x$, $r \mapsto \lambda x.3x-1$, $s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0, 1\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t, r, s\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0_, 1_-\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t_, r_, s_-\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0_, 1_-\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t_, r_, s_-\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0_, 1_-\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t_-, r_-, s_-\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0_, 1_-\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t_, r_, s_-\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

simboli, interpretazione, stati, termini

simboli: $\Sigma_C = \{\perp, 0_, 1_-\}$

interpretazione in \mathbb{N}_+ : $\perp \mapsto 1, 0 \mapsto \lambda x.2x, 1 \mapsto \lambda x.2x-1$

stati LTS: Σ_C -termini modulo $1\perp = \perp$

stati TRS: $\sigma \# x$, con: $\sigma \in \{0, 1\}^*$: storia delle transizioni
 x : stato LTS

termini TRS:

estensione con tre operatori ausiliari $\Sigma_A = \Sigma_C + \{t_, r_, s_-\}$

- Σ_A -termini
- termini di forma $\sigma \# a$, con a Σ_A -termine

interpretazione in \mathbb{N}_+ degli operatori ausiliari:

$t \mapsto \lambda x.3x, r \mapsto \lambda x.3x-1, s \mapsto \lambda x.3x-2$



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$B_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$A_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$B_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$A_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$B_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$A_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$B_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$A_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$B_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$A_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$B_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$A_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$B_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$A_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$B_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$A_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$B_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$A_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$B_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$A_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$\mathcal{B}_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ in un TRS finitario

regole di riscrittura

una doppia bipartizione ortogonale:

\mathcal{D} : regole dinamiche (prive di op. ausiliari nel pattern)

\mathcal{C} : regole ausiliarie computazionali (le altre)

\mathcal{B} : regole di frontiera (\perp nel pattern)

\mathcal{A} : regole non di frontiera (le altre)

$\mathcal{B}_{\mathcal{D}} : \sigma \# \perp \rightarrow \sigma 1 \# 0 \perp$	$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} : \sigma \# 0x \rightarrow \sigma 0 \# x$ $\sigma \# 1x \rightarrow \sigma 1 \# rx$
---	---

$\mathcal{B}_{\mathcal{C}} : r\perp \rightarrow 0\perp$ $s\perp \rightarrow \perp$ $t\perp \rightarrow 10\perp$	$\mathcal{A}_{\mathcal{C}} : r0x \rightarrow 1tx, r1x \rightarrow 0sx$ $s0x \rightarrow 0rx, s1x \rightarrow 1sx$ $t0x \rightarrow 0tx, t1x \rightarrow 1rx$
---	--



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)
- ad **esempio**:
 - $\sigma\#1^\omega \rightarrow \sigma 1\#1^\omega$ 2^a regola \mathcal{A}_D
 - $\rightarrow \sigma 1\#0\epsilon 1^\omega$ 2^a regola \mathcal{A}_C
 - $\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega$ 4^a regola \mathcal{A}_C (ω volte).
- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata. . .

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)
- ad **esempio**:
 - $\sigma\#1^\omega \rightarrow \sigma 1\#1^\omega$ 2^a regola \mathcal{A}_D
 - $\rightarrow \sigma 1\#0\epsilon 1^\omega$ 2^a regola \mathcal{A}_C
 - $\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega$ 4^a regola \mathcal{A}_C (ω volte).
- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1 \perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad esempio:

$$\begin{aligned} \sigma \# 1^\omega &\rightarrow \sigma 1 \# \perp 1^\omega && 2^{\text{a}} \text{ regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1 \# 0 \varepsilon 1^\omega && 2^{\text{a}} \text{ regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1 \# 0 1^\omega && 4^{\text{a}} \text{ regola } \mathcal{A}_C \text{ (} \omega \text{ volte).} \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata. . .

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad **esempio**:

$$\begin{aligned} \sigma\#1^\omega &\rightarrow \sigma 1\#r1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1\#0s1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega && 4^a \text{regola } \mathcal{A}_C (\omega \text{ volte}). \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad **esempio**:

$$\begin{aligned} \sigma\#1^\omega &\rightarrow \sigma 1\#r1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1\#0s1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega && 4^a \text{regola } \mathcal{A}_C (\omega \text{ volte}). \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad **esempio**:

$$\begin{aligned} \sigma\#1^\omega &\rightarrow \sigma 1\#r1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1\#0s1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega && 4^a \text{regola } \mathcal{A}_C (\omega \text{ volte}). \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad **esempio**:

$$\begin{aligned} \sigma\#1^\omega &\rightarrow \sigma 1\#r1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1\#0s1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega && 4^a \text{regola } \mathcal{A}_C (\omega \text{ volte}). \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)

- ad **esempio**:

$$\begin{aligned} \sigma\#1^\omega &\rightarrow \sigma 1\#r1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_D \\ &\rightarrow \sigma 1\#0s1^\omega && 2^a \text{regola } \mathcal{A}_C \\ &\rightarrow^\omega \sigma 1\#01^\omega && 4^a \text{regola } \mathcal{A}_C (\omega \text{ volte}). \end{aligned}$$

- una piccola "rivoluzione Copernicana"...



la dinamica $3x+1$ rivisitata...

... all'origine

- in un ω -TRS, l'equazione sui generatori $1\perp = \perp$ permette di rimpiazzare il simbolo di costante \perp con il termine 1^ω
- interpretazione di 1^ω : punto fisso di quella di 1
- conseguenza: regole di frontiera **superflue!** (per induzione transfinita)
- ad **esempio**:

$\sigma\#1^\omega$	\rightarrow	$\sigma 1\#r1^\omega$	2 ^a regola \mathcal{A}_D
	\rightarrow	$\sigma 1\#0s1^\omega$	2 ^a regola \mathcal{A}_C
	\rightarrow^ω	$\sigma 1\#01^\omega$	4 ^a regola \mathcal{A}_C (ω volte).
- una piccola “**rivoluzione Copernicana**”...



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La congettura di Böhm e Sontacchi è: NO
 - problema aperto: la Finite Cycles Conjecture (FCC)



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La **congettura** di Böhm e Sontacchi è: **NO**
 - problema aperto: la **Finite Cycles Conjecture (FCC)**



interpretazione in \mathbb{Z}

- basta solo postulare l'esistenza di un punto fisso per l'interpretazione di 0
- **le regole non cambiano**
- la dinamica cambia, ma solo nei nuovi stati compaiono (almeno) 4 nuove orbite periodiche:
 - 0^ω (0)
 - 10^ω (-1)
 - 1010^ω (-5,-7,-10)
 - 100010^ω (-17,-25,-37,-55,-82,-41,-61,-91,-136,-68,-34)
- ce ne sono altre?
 - La **congettura** di Böhm e Sontacchi è: **NO**
 - problema aperto: la **Finite Cycles Conjecture (FCC)**



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
 "ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale):
 un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^{\mathcal{I}}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che
 abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso
 $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è proprio, in quanto sono esclusi i
 razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è denso...



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
"ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^{\mathcal{I}}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è **proprio**, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è **denso**...



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
"ovunque"?

- precisiamo l'"**ovunque**", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^{\mathcal{I}}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è **proprio**, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è **denso**...



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
"ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^\mathcal{I}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è proprio, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è denso...



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
"ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^{\mathcal{I}}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è proprio, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è denso...



interpretazione in un'estensione densa di \mathbb{Z}

Idea!

che succede se... si postula l'esistenza di punti fissi
"ovunque"?

- precisiamo l'"ovunque", altrimenti è il caos (formale): un'interpretazione \mathcal{I} tale che $\forall \pi \in \{0, 1\}^+ \exists (\pi^\omega)^{\mathcal{I}}$
- affinché \mathcal{I} estenda l'interpretazione in \mathbb{Z} , occorre che abbiano soluzione tutte le equazioni di punto fisso $2^n x - m = x$, con $n \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $0 \leq m < 2^n$
- tali punti fissi generano un sottoinsieme proprio di \mathbb{Q} :

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

- tale sottoinsieme di \mathbb{Q} è **proprio**, in quanto sono esclusi i razionali $\frac{p}{2q}$ con p dispari; però è **denso**...



densità dell'estensione

- dimostrazione “diretta”...

...consultabile, ma sconsigliata (“brutta”);

- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$$

ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d , ergo...

- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].



densità dell'estensione

- dimostrazione “diretta”...
...consultabile, ma sconsigliata (“brutta” ;)
- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$$

ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d , ergo...

- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].



densità dell'estensione

- dimostrazione “diretta”...
 ...consultabile, ma sconsigliata (“brutta”);
- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$$

ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d , ergo...

- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].



densità dell'estensione

- dimostrazione “diretta”...
 ...consultabile, ma sconsigliata (“brutta”);
- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$$

ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d , ergo...

- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].



densità dell'estensione

- dimostrazione “diretta”...
 ...consultabile, ma sconsigliata (“brutta”);
- meglio, si dimostra innanzitutto che

$$\left\{ \frac{m}{2^n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ \frac{m}{2n - 1} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

infatti, se d è dispari, 2 e d sono coprimi, dunque per il Teorema di Eulero

$$2^{\phi(d)} \equiv 1 \pmod{d}$$

ovvero $2^{\phi(d)} - 1$ è multiplo di d , ergo...

- il resto della dimostrazione diventa molto più semplice [Scollo, 2005].



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è appena agli inizi
 - la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti “caotici”, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro estensioni al continuo
 - sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell’ambito discreto del problema originario
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della periodicità
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di specificabilità finita di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con ω -stringhe quasiperiodiche (Marcus), algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti “caotici”, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell’ambito discreto del problema originario
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di specificabilità finita di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con ω -stringhe quasiperiodiche (Marcus), algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti “**caotici**”, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell’**ambito discreto del problema originario**
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di specificabilità finita di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con ω -stringhe quasiperiodiche (Marcus), algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti **“caotici”**, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell'**ambito discreto del problema originario**
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di specificabilità finita di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con ω -stringhe quasiperiodiche (Marcus), algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti “**caotici**”, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell’**ambito discreto del problema originario**
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di **specificabilità finita** di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con **ω -stringhe quasiperiodiche** (Marcus),
algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti **“caotici”**, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell'**ambito discreto del problema originario**
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di **specificabilità finita** di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con **ω -stringhe quasiperiodiche** (Marcus),
algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (1)

Temi per ulteriore ricerca

- La teoria dei sistemi dinamici ST è **appena agli inizi**
la caratterizzazione degli attrattori è ancora da dimostrare...
- Le dinamiche di tipo Collatz presentano aspetti **“caotici”**, ma ciò è stato (sinora) mostrato solo in loro **estensioni al continuo**
sarebbe interessante poter caratterizzare tali aspetti nell'**ambito discreto del problema originario**
- I sistemi di riscrittura infinitari mostrati qui sono ancorati ai vincoli della **periodicità**
 - sembra interessante rilassare tali vincoli, pur rispettando quello di **specificabilità finita** di termini e riduzioni infinite
 - ad esempio con **ω -stringhe quasiperiodiche** (Marcus), algoritmicamente generabili, ...



Conclusioni (2)

Aree di ulteriore ricerca e applicazione

Più “praticamente”:

- costruzione di modelli simbolici discreti di fenomeni biologici
- validazione di detti modelli su dati sperimentali
- algoritmi paralleli per entrambi gli scopi



Conclusioni (2)

Area di ulteriore ricerca e applicazione

Più “**praticamente**”:

- **costruzione** di **modelli simbolici discreti di fenomeni biologici**
- **validazione** di detti modelli su dati sperimentali
- **algoritmi paralleli** per entrambi gli scopi



Conclusioni (2)

Aree di ulteriore ricerca e applicazione

Più “praticamente”:

- **costruzione** di **modelli simbolici discreti di fenomeni biologici**
- **validazione** di detti modelli su dati sperimentali
- **algoritmi paralleli** per entrambi gli scopi



Conclusioni (2)

Aree di ulteriore ricerca e applicazione

Più “praticamente”:

- **costruzione** di **modelli simbolici discreti di fenomeni biologici**
- **validazione** di detti modelli su dati sperimentali
- **algoritmi paralleli** per entrambi gli scopi



Conclusioni (2)

Area di ulteriore ricerca e applicazione

Più “praticamente”:

- **costruzione** di **modelli simbolici discreti di fenomeni biologici**
- **validazione** di detti modelli su dati sperimentali
- **algoritmi paralleli** per entrambi gli scopi



Problema $3x+1$

Riferimenti bibliografici



M. Chamberland

An Update on the $3x+1$ Problem

<http://www.math.grinnell.edu/~chamberl/3x.html>



J.C. Lagarias

The $3x + 1$ Problem: An Annotated Bibliography.

arXiv:math.NT/0309224v4, June 13, 2005.

<http://arxiv.org/abs/math.NT/0309224>



G. Scollo.

ω -rewriting the Collatz problem.

Fundamenta Informaticae, **64**(1–4):405–416, 2005.

preliminary RR version:

<http://www.sci.univr.it/~scollo/papers/dirr0425.pdf>



Sistemi dinamici di transizioni di stato

Riferimenti bibliografici



V. Manca, G. Franco, G. Scollo

State transition dynamics: basic concepts and molecular computing perspectives.

Chapter 2 in: M. Gheorghe & M. Holcombe (Eds.)

Molecular Computational Models: Unconventional Approaches

Idea Group, Hershey, PA, USA (2005) 32–55.



H. Jaeger

Dynamic Symbol Systems.

Doctoral dissertation, Universität Bielefeld, D (1994).



Simulazione discreta di fenomeni biologici (1)

Riferimenti bibliografici

-  L. Bianco, F. Fontana, G. Franco, V. Manca
P Systems for Biological Dynamics.
in: G. Ciobanu, M.J. Pérez-Jiménez, G. Paun (Eds.)
Applications of Membrane Computing
Springer, Natural Computing Series (2005) 81–126.
-  V. Manca, L. Bianco, F. Fontana
Evolution and Oscillation in P Systems: Applications to
Biological Phenomena.
in: G. Mauri *et al.* (Eds.) *Membrane Computing*
Springer, LNCS **3365** (2005) 63–84



Simulazione discreta di fenomeni biologici (2)

Riferimenti (work in progress)



L. Bianco, F. Fontana, V. Manca

Metabolic algorithm with time-varying reaction maps

in: *Proc. BWMC 2005*, 43–62.



G. Franco

Biomolecular computing – Combinatorial algorithms and laboratory experiments

Doctoral dissertation, Università di Verona, forthcoming (2006).

