Méthode spéctrale rapide pour l'équation de Fokker-Planck-Landau

Lorenzo PARESCHI[*], Giovanni RUSSO[†], Giuseppe TOSCANI[‡]

Résumé

Dans cet article, nous introduisons une nouvelle méthode spectrale pour l'équation de Fokker-Planck-Landau (FPL). La méthode permet, contrairement au coût usuel en $O(n^2)$ de l'opérateur de collision de FPL, d'obtenir des solutions numériques spectralement précises avec simplement $O(n \log_2 n)$ opérations.

Fast Spectral Methods for the Fokker-Planck-Landau Equation

Abstract

In this note we present a new spectral method for the Fokker-Planck-Landau (FPL) equation. The method allows to obtain spectrally accurate numerical solutions with simply $O(n \log_2 n)$ operations in contrast with the usual $O(n^2)$ cost of the FPL collision operator.

Abridged english version

We will adapt to the FPL equation a new method for the numerical solution of the space homogeneous Boltzmann equation, based on a Fourier spectral approximation of the collision operator in the velocity space, recently introduced in [9, 10]. In the FPL case, the method gives a computational cost of order $O(n \log_2 n)$, where n is the number of Fourier modes, in contrast with the usual quadratic cost of deterministic methods, and it can be designed to preserve mass and to approximate with spectral accuracy momentum and energy.

[*]Department de Mathematiques, Université de Ferrara, via Machiavelli 35, I-44100 Ferrara, ITALY. (e-mail: pareschi@dm.unife.it)

[†]Department de Mathematiques, Université de L'Aquila, via Vetoio, loc. Coppito, I-67010 L'Aquila, ITALY. (e-mail: russo@univaq.it)

[‡]Department de Mathematiques, Université de Pavia, via Ferrata 1, I-27100 Pavia, ITALY. (e-mail: toscani@dimat.unipv.it)

1 Introduction

Nous considérons l'équation de Landau-Fokker-Planck (FPL) pour la fonction de distribution f, qui dépend de la vitesse v dans $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 2$, et le temps t dans $\mathbb{R}^+$.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,v) = Q_L(f,f). \tag{1.1}$$

$$Q_L(f,f)(v) = \nabla \cdot \int dv_* \, A(v - v_*) \left(f(v_*) \nabla f(v) - f(v) \nabla_{v_*} f(v_*) \right). \tag{1.2}$$

Dans (1.2), la matrice A est symétrique semi-définie positive, et dépend de l'interaction entre les particules, $A(z) = \Psi(|z|)\Pi(z)$ pour une fonction non négative Ψ. Pour les interactions décroissant selon une puissance de la distance :

$$\Pi_{ij}(z) = \left(\delta_{ij} - \frac{z_i z_j}{|z|^2} \right), \qquad \Psi(|z|) = \Lambda |z|^{\gamma+2} \quad \gamma \geq -3, \tag{1.3}$$

où Λ est une constante positive. Les cas les plus intéressants pour les applications sont les cas $\gamma = -3$, $d = 3$, i.e. le cas Coulombien.

Plusieurs approches numériques de l'équation de FPL ont été développées durant les dix dernières annèes [1, 2, 3, 5, 7, 8]. Ici, nous adaptons à l'équation de FPL une nouvelle méthode pour les solutions numériques de l'équation de Boltzmann homogène en espace, basée sur une approximation spectrale de l'opérateur de collision dans l'espace des vitesses, récemment introduite dans [9, 10]. Dans le cas de l'équation de FPL, la méthode a un cout en $O(n \log_2 n)$, ou n est le nombre de modes de Fourier contrairement au cout usuel en $O(n^2)$ des autres méthodes, et elle peut préserver la masse et approximer avec une précision spectrale la quantité de mouvement et l'énergie.

2 Extrapolation spectrale de l'équation de FPL

Soit $g = v - v_*$. L'opérateur de collision de FPL (1.2) peut s'écrire comme :

$$Q_L(f,f)(v) = \nabla \cdot \int dg \, A(g) \left(f(v+g) \nabla f(v) - f(v) \nabla_g f(v+g) \right). \tag{2.4}$$

Soit $\mathcal{B}(0,R)$ la boule de rayon R de centre l'origine. Si $\mathrm{Supp}(f(v)) \subset \mathcal{B}(0,R)$, alors

$$Q_L(f,f)(v) = \nabla \cdot \int_{\mathcal{B}(0,2R)} A(g) \left(f(v+g) \nabla f(v) - f(v) \nabla_g f(v+g) \right) dg, \tag{2.5}$$

avec $v + g \in \mathcal{B}(0,3R)$.

Dans le reste de l'article, nous restreignons la fonction de distribution $f(v)$ sur le cube $[-T,T]^3$ avec $T \geq 3R$, supposant que $f(v) = 0$ sur $[-T,T]^3 \setminus \mathcal{B}(0,R)$, et en la prolongeant par périodicité sur $[-T,T]^3$. Comme observé dans [10], il suffit de prendre $T \geq 2R$ pour éviter les intersections des regions ou f est different de zero. Pour simplifier les formules, on suppose que $T = \pi$, et donc $R = \pi/2$.

La fonction de distribution f est approximée par une somme partielle de séries de Fourier

$$f_N(v) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ik\cdot v}, \qquad \hat{f}_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\Omega} f(v) e^{-ik\cdot v}\, dv. \tag{2.6}$$

ou $\Omega = [-\pi,\pi]^3$, $k = (k_1,\ldots,k_d)$, et, pour simplifier les notations,

$$\sum_{k=-N}^{N} \equiv \sum_{k_1=-N}^{N} \cdots \sum_{k_d=-N}^{N}.$$

Un système d'EDO's pour les coefficients $\hat{f}_k$, $k = -N,\ldots,N$, est obtenu partir de [4, 6]

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_N}{\partial t} - Q_L(f_N, f_N) \right) e^{-ik\cdot v}\, dv = 0. \tag{2.7}$$

En substituant l'expression (2.6) dans (2.7), et en utilisant les propriétés orthogonales des polynômes trigonométriques, nous obtenons le procédé

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{\substack{l+m=k\\ l,m=-N}}^{N} \hat{f}_l\, \hat{f}_m \hat{\beta}_L(l,m), \quad k = -N,\ldots,N, \tag{2.8}$$

où $\hat{\beta}_L(l,m) = \hat{B}_L(l,m) - \hat{B}_L(m,m)$ et the FPL *kernel modes* $\hat{B}_L(l,m)$ sont donnés par

$$\hat{B}_L(l,m) = \int_{\mathcal{B}(0,\pi)} \Psi(|g|) \left[l^2 - \left(l \cdot \frac{g}{|g|} \right)^2 \right] e^{ig\cdot m} dg. \tag{2.9}$$

Remarquons que (2.9) sont des quantités scalaires indépendantes de la fonction f, avec la propriété

$$\hat{B}_L(l,m) \;=\; \hat{B}_L(-l,m) = \overline{\hat{B}_L(l,-m)} = \hat{B}_L(l,-m), \tag{2.10}$$

$$\hat{B}_L(m,m) \quad \text{dépend seulement de } |m|. \tag{2.11}$$

La dernière égalité de Eq. (2.11) montre que les coefficients sont réels, et est une conséquence du fait que la fonction Ψ depend seulement de $|z|$. De plus, si le noyau $\Psi(|g|) = \Lambda |g|^{2+\gamma}$, alors

$$|\hat{B}_L(l,m)| \le l^2 \hat{B}_L(0,0), \tag{2.12}$$

ou

$$\hat{B}_L(0,0) = 4\pi \frac{\pi^{\gamma+5}}{\gamma+5}\Lambda.$$

3 Propriétés principales

Pour chaque $t \geq 0$, $f_N(v,t)$ est un polynôme trigonométrique de degré N en v, i.e. $f_N(t) \in I\!P^N$ ou

$$I\!P^N = span\left\{ e^{ik\cdot v} \,|\, -N \leq k_j \leq N,\, j = 1,2,3 \right\}.$$

De plus, soit $\mathcal{P}_N : L^2(\Omega) \to I\!P^N$ la projection orthogonale sur $I\!P^N$ pour le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ (see (2.7)):

$$< f - \mathcal{P}_N f, \phi >= 0, \qquad \forall\, \phi \,\in\, I\!P^N.$$

Avec cette définition $\mathcal{P}_N f = f_N$, où f_N et la série de Fourier partielle de f (2.6) et la méthode définie par (2.8) peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = Q_N^L(f_N, f_N), \tag{3.13}$$

ou $Q_N^L(f_N, f_N) = \mathcal{P}_N Q_L(f_N, f_N)$ et $Q_L(\cdot,\cdot)$ et l'operateur de FPL avec un cut-off sur la vitesse relative (2.5). Il est facile de vérifier d'après la propriété (2.11) que l'opérateur de collision extrapolé $Q_N^L(f_N, f_N)$ préserve le masse dans le temps , i.e.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_\Omega f_N(v)\, dv = 0.$$

Maintenant, si nous notons $H_p^r(\Omega)$, où $r \geq 0$ est un entier, le sous-espace de l'espace de Sobolev $H^r(\Omega)$, qui est formé des fonctions périodiques [4, 6], nous avons [12]

Proposition 3.1 *Soit $f, g \in L^2(\Omega)$, alors*

$$\|Q^L(f,g)\|_2 \leq C \|g\|_1 \|f\|_{H_p^2}.$$

Pour simplifier les notations, nous noterons $Q(f)$ au lieu de $Q(f,f)$. La qualité de l'approximation en norme L^2 de l'opérateur de collision de FPL $Q^L(f)$ par $Q_N^L(f_N)$, est donnée par

Théorème 3.2 *Soit $f \in H_p^2(\Omega)$, alors $\forall\, r \geq 0$*

$$||Q^L(f) - Q_N^L(f_N)||_2 \leq C \left(||f - f_N||_{H_p^2} + \frac{||Q^L(f_N)||_{H_p^r}}{N^r} \right), \tag{3.14}$$

ou C depend de $||f||_2$.

Démonstration

D'abord, nous pouvons diviser l'erreur en deux parties

$$||Q^L(f) - Q_N^L(f_N)||_2 \leq$$

$$||Q^L(f) - Q^L(f_N)||_2 + ||Q^L(f_N) - Q_N^L(f_N)||_2.$$

Maintenant, on a clairement $Q^L(f_N) \in \mathbb{P}_{2N}$ et donc $Q^L(f_N)$ est périodique et régulier ainsi que ses dérivées comme dans [4]

$$||Q^L(f_N) - Q_N^L(f_N)||_2 \leq \frac{C}{N^r}||Q^L(f_N)||_{H_p^r}, \quad \forall\, r \geq 0. \tag{3.15}$$

Par application de la proposition 3.1 et de l'identité

$$Q^L(f) - Q^L(g) = Q^L(f+g, f-g)$$

Nous avons

$$||Q^L(f) - Q^L(f_N)||_2 = ||Q^L(f+f_N, f-f_N)||_2 \leq C||f+f_N||_1||f-f_N||_{H^2}$$

$$\leq 2C_1||f||_2||f-f_N||_{H^2}.$$

■

Enfin, il suffit de voir que

$$||f - f_N||_{H_p^2} \leq \frac{C}{N^{r-2}}||f||_{H_p^r},$$

Pour avoir la précision spectrale de l'approximation.

Corollaire 3.3 *Soit* $f \in H_p^r(\Omega)$, $r \geq 2$ *alors*

$$||Q^L(f) - Q_N^L(f_N)||_2 \leq \frac{C}{N^{r-2}}\left(||f||_{H_p^r} + ||Q^L(f_N)||_{H_p^r}\right). \tag{3.16}$$

D'après le corollaire précédent, il découle que

$$| < Q^L(f), \varphi > - < Q_N^L(f_N), \varphi > | \leq \frac{C}{N^{r-2}}||\varphi||_2\left(||f||_{H_p^r} + ||Q^L(f_N)||_{H_p^r}\right), \tag{3.17}$$

Et donc, en prenant $\varphi = v, v^2$, la precision spectrale de la quantité de mouvement

4 Mise en place de l'algorithme rapide

Réecrivons le schéma (2.8) sous la forme, $k = -N, \ldots, N$

$$\frac{\mathrm{d}\hat{f}_k}{\mathrm{d}t} = \sum_{m=-N}^{N} \hat{f}_{k-m}\, \hat{f}_m \hat{\beta}_L(k-m, m). \tag{4.18}$$

Dans l'expression précédente, nous supposons que les coefficients de Fourier sont nuls pour $|k_j| > N$, $j = 1, 2, 3$. L'évaluation suivante de (4.18) demande exactement $O(n^2)$ opérations , ou $n = N^d$ et $d \geq 2$ est la dimension de l'espace des vitesses. Cependant, grâce à la structure des FPL kernel modes, il est possible de réduire le calcul à seulement $O(n \log_2 n)$ opérations. En fait, $\hat{B}_L(l, m)$ se sépare en

$$\hat{B}_L(l, m) := l^2 \tilde{F}(m) - \sum_{p,q=1}^{d} l_p\, l_q I_{pq}(m) = l^2 \tilde{F}(m) - l\, \mathcal{I}(m)\, l^T,$$

ou l^T représente le vecteur $l = (l_1, l_2, l_3)$, $\mathcal{I} = (I_{pq})$ est une matrice symétrique 3×3, et

$$\tilde{F}(m) = \int_{\mathcal{B}(0,\pi)} |g|^{2+\gamma} e^{ig\cdot m} dg, \tag{4.19}$$

$$I_{pq}(m) = \int_{\mathcal{B}(0,\pi)} |g|^{\gamma} g_p\, g_q e^{ig\cdot m} dg, \quad p, q = 1, \ldots, d. \tag{4.20}$$

Nous pouvons donc écrire

$$\hat{\beta}_L(l, m) = l^2 \tilde{F}(m) - l\, \mathcal{I}(m)\, l^T - \hat{B}_L(m, m). \tag{4.21}$$

L'algorithme demande donc le calcul de $d(d+1)/2 + 1$ convolutions pour le terme de gain (le nombre d'éléments distincts de $\mathcal{I}$ plus un) et une seule convolution pour le terme de perte. Il est bien connu qu'il est possible de calculer une convolution en seulement $O(n \log_2 n)$ opérations. Pour les détails de la mise en place de cette technique standard pour des méthodes spectrales, nous invitons le lecteur lire [4].

Maintenant, soit $\Psi(|g|) = \Lambda |g|^{\gamma+2}$. Pour simplifier les notations, nous prenons $\Lambda = 1$. Pour la mise en place de l'algorithme, nous devons évaluer les quantités (4.19)-(4.20). Par soucis de simplicité, nous traitons ici seulement le cas de la dimension 2 : $d = 2$. Un calcul simple montre que

$$\tilde{F}(m) = F(|m|) = 2\pi \int_0^{\pi} r^{\gamma+3} J_0(|m| r)\, dr, \tag{4.22}$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0. De plus, on peut montrer que

$$\begin{aligned} I_{11}(m) &= \frac{1}{2}\left[F(|m|) + \frac{m_1^2 - m_2^2}{|m|^2} G(|m|)\right], \\ I_{22}(m) &= \frac{1}{2}\left[F(|m|) - \frac{m_1^2 - m_2^2}{|m|^2} G(|m|)\right], \\ I_{12}(m) &= I_{21}(m) = \frac{m_1 m_2}{|m|^2} G(|m|), \end{aligned} \tag{4.23}$$

ou

$$G(|m|) = 2\pi \int_0^{\pi} r^{\gamma+3} C(|m|r)\, dr, \tag{4.24}$$

et

$$C(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(x\cos\phi)\cos(2\phi)\, d\phi.$$

Donc le calcul des modes du noyau de FPL en 2 dimensions réduit simplement le calcul des intégrales une variable $F(|m|)$ et $G(|m|)$. Ces quantités peuvent être calculées trés pécisement et stockées dans des tableaux deux dimensions.

References

[1] Yu.A. Berezin, V.N. Khudick and M.S. Pekker, Conservative finite difference schemes for the Fokker-Planck equation not violating the law of an increasing entropy, *J. Comput. Phys.*, 69, 163-174, (1987).

[2] C. Buet and S. Cordier, Conservative and entropy decaying numerical scheme for the isotropic Fokker-Planck-Landau equation, *J. Comput. Phys.*, **145**, no.1, pp. 228-245, (1998).

[3] C. Buet, S. Cordier, P. Degond and M. Lemou, Fast algorithms for numerical, conservative, and entropy approximations of the Fokker-Planck equation, *J. Comp. Phys.*, **133**, 310-322, (1997).

[4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni and T.A. Zang, *Spectral methods in fluid dynamics*, Springer Verlag, New York (1988).

[5] P. Degond and B. Lucquin-Desreux, An entropy scheme for the Fokker-Planck collision operator of plasma kinetic theory, *Numer. Math.*, **68**, 239-262, (1994).

[6] D. Gottlieb and S.A. Orszag, *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*, SIAM CBMS-NSF Series, (1977).

[7] M. Lemou, Multipole expansions for the Fokker-Planck-Landau operator, *Num. Math.*, **78**, p. 597-618, (1998).

[8] B. Lucquin-Desreux, Discrétization de l'opérateur de Fokker-Planck dans le cas homogène , *C.R. Acad. Sc. Paris* , **A 314** série 1, 407–411, (1992).

[9] L. Pareschi and B. Perthame, A Fourier spectral method for homogeneous Boltzmann equations, *Transp. Theo. Stat. Phys.*, **25**, 369–383, (1996).

[10] L. Pareschi and G. Russo, Numerical solution of the Boltzmann equation I: Spectrally accurate approximation of the collision operator, to appear on *SIAM J. Numer. Anal.*

[11] L. Pareschi, G. Russo and G. Toscani, Fast Spectral Methods for the Fokker-Planck-Landau Collision Operator of Plasma Physics, preprint 1999.

[12] L. Pareschi, G. Toscani and C. Villani, Spectral methods for the non cut-off Boltzmann equation and numerical grazing collision limit, preprint 1999.