

Compito del 13/6/1995

1. Si consideri il sistema lineare

$$Ax = b$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0.004 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si risolva il sistema mediante il metodo di Gauss-naive e mediante il metodo di Gauss con pivot, utilizzando aritmetica di macchina con due cifre con arrotondamento [ad esempio il numero 376 viene arrotondato a 380, il numero 0.000473 a 0.00047, e così via].

Si confrontino le soluzioni numeriche ottenute con la soluzione esatta del sistema e si commenti il risultato.

[12 punti]

2. Si dimostri che per ogni terna di reali (y_1, y_2, y_3) esiste ed è unico il polinomio $p \in \Pi_2$ tale che $p(0) = y_1$, $p(1) = y_2$, $\int_0^1 p(x) dx = y_3$.

[5 punti]

3. Sia data l'applicazione

$$\Phi(x) = -x^2 + 4x - 4 + 4(1 + x^2)^{-1}.$$

Mostrare che 1 è punto unito di Φ . Dire se 1 è un punto attrattivo, ed in caso affermativo calcolare l'ordine di convergenza del metodo iterativo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

[5 punti]

4. Si consideri l'integrale

$$I = \int_0^1 te^{-t} dt.$$

Siano T_1 l'approssimazione dell'integrale ottenuta mediante la formula dei trapezi semplice, T_2 l'approssimazione di I ottenuta mediante la formula dei trapezi composta con due intervalli ed S il risultato dell'applicazione della formula di Simpson semplice.

- (a) Determinare T_1 , T_2 ed applicare il metodo di estrapolazione di Romberg per ottenere una valutazione più accurata dell'integrale.
- (b) Calcolare S e confrontare il risultato con quanto ottenuto precedentemente e con il valore esatto di I .

[8 punti]