Compito del 17/10/1994

[1] Sia $f \in C^\infty[0,1]$ e siano x_0, x_1, $x_2 \in [0,1]$. Si dica sotto quali ipotesi sui nodi x_0, x_1, x_2 esiste ed è unico il polinomio P che verifica le seguenti condizioni di interpolazione:

$$P(x_0) = f(x_0)$$
$$P'(x_1) = f'(x_1)$$
$$P'(x_2) = f'(x_2)$$

[2] Sia $k \in R$ parametro reale e siano $M1$ e $M2$ le matrici definite da

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & 0 \\ k-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M2 = \begin{pmatrix} 1 & k-3 & 0 \\ k-3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se si applicasse il metodo iterativo di Gauss-Jacobi per risolvere i sistemi $M1x = b$ e $M2x = b$, $x \in R^3$, $b \in R^3$, dire per quali valori del parametro k entrambe i metodi convergono alla soluzione. Per quali di questi valori il metodo di Jacobi relativo al sistema $M1x = b$ converge più rapidamente di quello applicato al sistema $M2x = b$.

[3] Dimostrare che il procedimento iterativo

$$x_{n+1} = x_n + 0.5e^{2-2x_n} - 0.5$$

converge per ogni $x_0 > 0$, e stabilire l'ordine di convergenza.

[4] Sia $f \in C[0,1]$ e $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$. Si consideri la seguente formula di quadratura sui nodi $x_0 = 1/2$, $x_1 = 3/4$

$$I_2(f) = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

Si determinino i pesi w_0, w_1 in modo che la formula sia di tipo interpolatorio. Calcolare una espressione esplicita dell'errore. (Si usi la formula di Newton per la seconda parte dell'esercizio).