

Compito del 05/7/2011

1. • **Per gli studenti dell' anno accademico 2010-2011.** Dato il sistema lineare

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \alpha x_2 &= 3,\end{aligned}$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il metodo di Gauss-Seidel converge. Per $\alpha = 1$ applicare tre iterazioni di tale metodo, partendo dal vettore iniziale nullo, e confrontare il risultato ottenuto con la soluzione esatta del sistema. [12 punti]

- **Per gli studenti degli anni precedenti** Verificare che la matrice è fattorizzabile secondo Cholesky

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Dato quindi il termine noto $b = (3, 1, 1)^T$ si risolva il sistema lineare $Ax = b$ mediante tale fattorizzazione. [12 punti]

2. Assegnate le coppie $(x_i, f(x_i))$ con $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ e sia $f(x_0) = -2$, $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 2$, $f(x_3) = 4$, determinare

- il polinomio $p(x)$ che interpola tali coppie di valori;
- il polinomio $q(x)$, che interpola, oltre alle coppie assegnate, anche il punto $(0, 0)$

utilizzando la formula del polinomio più conveniente. [8 punti]

3. Sia $f(x) = (x - 1)^3$. Provare che il metodo di Newton applicato all'equazione $f(x) = 0$ ha ordine di convergenza lineare con $e_{k+1} \approx Ce_k$, $C < 1$, e calcolare il valore della costante C . [4 punti]

4. Approssimare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx,$$

con le formule di quadrature del punto medio, del trapezio e di Simpson e confrontare il risultato con il valore esatto. [6 punti]

Attenzione Gli errori di calcolo vanno evitati! Si consiglia caldamente di fare tutte le verifiche possibili per assicurarsi che i risultati ottenuti siano corretti.