

Analisi Numerica

Compito del 4/2/2006

1. Sia data la funzione

$$f(x) = 3 - \cos(\pi(x - 2))$$

nell'intervallo $I = [1, 3]$. Determinare il polinomio di grado minimo che interpoli la funzione f agli estremi dell'intervallo I e nel suo punto medio, e che abbia la stessa derivata prima della funzione f agli estremi dell'intervallo I .

2. Si consideri la successione $\{x_n\}$ generata mediante il seguente procedimento iterativo:

$$x_{n+1} = \Phi(x_n),$$

dove la funzione di iterazione Φ è definita come

$$\Phi(x) = \frac{2x^3 - A}{3x^2},$$

ed A è un parametro reale.

- (a) determinare i punti fissi della funzione Φ e dire se e quali sono attrattivi.
- (b) Stabilire l'ordine di convergenza della successione x_n nell'intorno dei punti fissi attrattivi.

3. Si consideri l'integrale

$$I[f] = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} f(x) dx$$

La funzione integranda è singolare. Mostrare che con la sostituzione di variabile $x(t) = t^2$ la singolarità si elimina, ed applicare la formula dei trapezi composta con 4 intervalli per la approssimazione dell'integrale così ottenuto, nel caso della funzione

$$f(x) = \cos(\pi x).$$

Confrontare il risultato numerico con il risultato esatto (con otto cifre) $I_e = 0.37398283$. Stabilire in questo caso l'ordine di accuratezza della formula dei trapezi

[Si ricorda che una formula composta T_h di sice di ordine p se si ha $I[f] = T_h[f] + O(h^p)$]

Nota: l'argomento delle funzioni trigonometriche è espresso in radianti e non in gradi.