

Compito del 29/09/2008

1. [7 punti] Trovare il numero di condizionamento delle seguenti funzioni

- (a) $x - 1$,
- (b) $\ln(|x|)$,
- (c) $e^{|x|}$,

e determinare i valori di x per i quali il calcolo delle corrispondente funzioni é mal condizionato.

Aiuto: il numero di *condizionamento relativo* nel calcolo di una funzione $y = f(x)$, supposta derivabile, é dato dalla quantità:

$$\text{cond}(f(x)) = x \frac{f'(x)}{f(x)}$$

2. [9 punti] Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix},$$

e $b = (1, 1, 1)^T$.

- (a) Determinare per quali valori di a la matrice ammette la fattorizzazione di Cholesky.
- (b) Posto $a = 2$ determinare la fattorizzazione di Cholesky e risolvere il sistema.

3. [14 punti] Assegnata la seguente tabella di valori per la funzione continua $f(x)$:

| | | | | |
|--------|----|---|---|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | -1 | 0 | 1 | 26 |

- (a) Determinare il polinomio $p(x)$ di grado minimo che interpola la funzione nei quattro punti individuati dalla tabella.
- (b) Trovare un valore approssimato dello zero del polinomio $p(x)$ tra 0.1 e 0.4 mediante il metodo di Newton con un errore minore di 10^{-3} dopo aver verificato le condizioni di applicabilità di tale metodo nell'intervallo dato [si osservi che tale zero si può calcolare analiticamente].
- (c) Costruire una formula di quadratura interpolatoria avente come nodi gli zeri di $p(x)$ (cioè determinare i pesi di tale formula), per l'approssimazione dell'integrale:

$$\int_0^2 F(x) dx$$

- (d) [Facoltativo] Stabilire l'ordine polinomiale della formula di quadratura così ottenuta.