

Compito di Calcolo Numerico del 27/9/2010

1. Dato il sistema lineare $Ax = b$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix},$$

- risolvere il sistema mediante il metodo di Gauss *naive*, e calcolare la fattorizzazione $A = LU$ come sottoprodotto (cioè la fattorizzazione deve essere determinata come uno dei risultati della applicazione del metodo di Gauss).
- Risolvere il sistema con il metodo di Gauss con pivot, e calcolare la fattorizzazione $PA = \tilde{L}\tilde{U}$ della matrice A come sottoprodotto.
- Verificare la correttezza delle fattorizzazioni trovate.

[10 punti]

2. Scrivere i polinomi elementari di Lagrange relativi ai nodi $(x_0 = -h, x_1 = 0, x_2 = h)$ e approssimare mediante questi nodi di interpolazione il valore di $\cos(\pi/4)$, con $h = \pi/2$, e confrontare il risultato ottenuto con il risultato esatto. [6 punti]

3. Si consideri la funzione $f(x) = 5x \exp(-x) - 1$.

- Dimostrare che la funzione ha un solo zero reale α nell'intervallo $[0,1]$.
- Dimostrare che α è punto fisso delle seguenti tre funzioni di iterazione:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{5}e^x, \quad \Phi_2(x) = \log(5x), \quad \Phi_3(x) = \frac{e^x/5 - x^2}{1 - x}$$

- Dire quali delle tre funzioni di iterazione conducono ad un procedimento iterativo convergente partendo da $x_0 = 0.5$, e calcolarne l'ordine di convergenza.

[12 punti]

4. Si determinino i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tale che la formula di quadratura $\int_0^h f(x)dx \approx h(\alpha f(0) + \beta f(h)) + h^2(\gamma f'(0) + \delta f'(h))$ sia esatta per polinomi di grado 3. [8 punti]

La somma dei punti è 36. Il compito si ritiene sufficiente se il punteggio ottenuto è almeno 18, ed ottimo se il punteggio ottenuto è ≥ 30 .