

Scritto di Analisi Numerica del 26/06/2007

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$. Siano J e G le matrici di iterazione dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema $Ax = b$.

Si determini il raggio spettrale di J e G e si diano condizioni necessarie e sufficienti su α affinché i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel siano convergenti.

2. Sia $f(x) = \frac{1}{1+x}$ con $x \in [0, 1]$. Determinare il numero $n + 1$ di nodi di interpolazione ugualmente spaziatati $x_i = i/n$ $i = 0, \dots, n$, tale che la spline lineare di interpolazione in tali nodi fornisca una approssimazione con un errore massimo minore di 10^{-4} .

3. Determinare l'ordine polinomiale α della formula di quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{4}{3}f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}f(0) + \frac{4}{3}f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Utilizzare tale formula per approssimare il valore dell'integrale definito:

$$\int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

e calcolare l'errore commesso.