Compito del 21/09/2007

1. Si consideri il sistema:
$$\begin{array}{rcrcr} 1.00 * 10^{-4}x_1 & + & 1.00x_2 & = & 1.00 \\ 1.00x_1 & + & 1.00x_2 & = & 2.00. \end{array}$$
   Utilizzando aritmetica in base 10 con tre cifre significative, applicare il metodo di eliminazione di Gauss con e senza pivoting per la risoluzione del sistema e confrontare i risultati ottenuti.

2. Sia data la funzione $y = sin(x)$ in $[0, \pi]$, nei punti $x_j = jh$, $j = 0, ..., N$, $h = \frac{\pi}{N}$. Considerato in ciascun intervallo $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 2, ..., N-1$, un polinomio di interpolazione di grado 3 alla funzione nei punti $x_{j-2},\ x_{j-1},\ x_j,\ x_{j+1}$,
   a) Maggiorare l'errore di interpolazione in I_j,
   b) Determinare N in modo che tale errore sia inferiore di 10^{-8} (in valore assoluto).
   Suggerimento. Osservare che se $x \in (x_1, x_2)$ allora:
   $x - x_0 < x_2 - x_0,\ \ x_3 - x < x_3 - x_0,\ \ (x - x_1)(x_2 - x) < (x_2 - x_1)^2/2.$

3. Si consideri il seguente integrale
$$I(f) = \int_0^2 sin(x^2)\, dx$$
   a) Si valuti il numero minimo di sottointervalli necessari per calcolare $I(f)$ con un errore assoluto $\leq 10^{-2}$, utilizzando la formula dei trapezi composita.
   b)Calcolare $I(f)$ con la formula di Gauss-Legendre a quattro nodi, sapendo che nodi e pesi di tale formula, nell'intervallo $[-1, 1]$, sono:
   $x_2 = -x_1 = 0.339981,\ \ x_3 = -x_0 = 0.861136,$
   $b_1 = b_2 = 0.652145,\ \ b_0 = b_3 = 0.347855.$