Compito del 20/06/2011

1. - **Per gli studenti dell' anno accademico 2010-2011**
     Data la matrice
     $$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
     Dire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono per tale matrice.
   - **Per gli studenti degli anni precedenti**
     Scrivere le equazioni normali per il calcolo di un polinomio di secondo grado che approssimi i punti della seguente tabella
     $$\begin{aligned} X &= [-1.2, -1.0, -0.5, 0, 0.2, 1.0, 1.1]; \\ Y &= [0.1, 0.3, 0.4, 1.0, 0.8, 1.1, 1.4]; \end{aligned}$$
     nel senso dei minimi quadrati, ottenute minimizzando lo scarto quadratico medio:
     $$\Phi(a, b, c) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a x_i^2 + b x_i + c))^2$$
     Discutere la possibilità di risolvere il sistema delle equazioni normali utilizzando la fattorizzazione di Cholesky.

   [15 punti]

2. Sia data la funzione $f(x) = \log_2(x)$ in $[1, 4]$ e i nodi $x_0 = 1,\ x_1 = 2,\ x_2 = 4,\ x_3 = 8$.
   a) Calcolare il polinomio $p \in \mathbb{P}_3$ che interpola la funzione in tale punti e lo si valuti in $\hat{x} = 3.0$.
   b) Si utilizzi la formula dell'errore della interpolazione di Lagrange per valutare $E(\hat{x}) = |f(\hat{x}) - p(\hat{x})|$ nel punto $x = 3$ e si confronti il risultato ottenuto con l'errore vero.

   [8 punti]

3. Data la formula di quadratura
   $$I_2[f] = b_0 f(0) + b_1 f(1) + b_2 f'(0)$$
   per il calcolo dell'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ con $f \in C^1([0, 1])$. Determinare $b_0,\ b_1,\ b_2$ tale che $I_2[f]$ abbia ordine polinomiale 2. [7 punti]