

## Compito del 11/04/2011

1. Dato il sistema lineare  $Ax = b$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 125 \end{pmatrix},$$

matrice simmetrica e definita positiva.

- (a) Calcolare la fattorizzazione  $LU$  e di Cholesky di  $A$ .  
(b) Calcolare il numero di condizionamento nella norma  $\|\cdot\|_\infty$  associato alla soluzione dei due sistemi lineari

$$LUx = b, \quad R^T Rx = b,$$

sapendo che se  $A = BC$  allora nella soluzione dei due sistemi lineari  $Bz = b$  e  $Cx = z$  si vede che il condizionamento associato alla soluzione di questi sistemi è il prodotto dei numeri di condizionamento dei fattori  $B$  e  $C$  (*facoltativo*: provare questa affermazione considerando la perturbazione  $\|\delta b\| / \|b\|$ ).

- (c) Calcolare il numero di condizionamento di  $A$  e confrontare i risultati.

[12 punti]

2. Si dimostri che per ogni terna di reali  $(y_0, y_1, y_2)$  esiste ed è unico il polinomio  $P \in \Pi_2$  tale che  $P(0) = y_0, P(0.5) = y_1, \int_0^1 P(x)dx = y_2$ . [4 punti]
3. Sia  $f(x) = (x-1)^3$ . Provare che il metodo di Newton applicato all'equazione  $f(x) = 0$  ha ordine di convergenza lineare con  $e_{k+1} \approx Ce_k, C < 1$ , e calcolare il valore della costante  $C$ . [6 punti]
4. Costruire una formula di quadratura aperta nell'intervallo  $[a, b]$  sui nodi  $x_0 = a + (b-a)/4$  e  $x_1 = b - (b-a)/4$ . Applicare la formula ottenuta all'integrale fra 0 e  $\pi$  della funzione  $f(x) = \sin(x)$  e confrontare il risultato con la soluzione esatta. [8 punti]