

Compito del 08/09/2008

1. Si considerino le due seguenti funzioni

$$\phi(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \quad \psi(x) = 1/(\sqrt{1+x} + \sqrt{x}).$$

Dopo aver mostrato l'equivalenza delle due espressioni, si valutino tali funzioni per $x = 1234$, supponendo di operare in aritmetica in virgola mobile a 4 cifre a base decimale. Si supponga di utilizzare una approssimazione della radice quadrata, $\tilde{\sqrt{x}}$, legata alla radice quadrata esatta dalla relazione $\tilde{\sqrt{x}} = fl(\sqrt{x})$, dove fl rappresenta l'arrotondamento. Si confronti quanto ottenuto mediante le due rappresentazioni con il risultato esatto, e si commenti il risultato.

2. Studiare il seguente metodo iterativo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$, con

$$\Phi(x) = \frac{2\mu + 4 - 0.5x^2}{1 + \mu}, \quad \mu \in R - \{-1\},$$

individuandone i punti fissi, studiandone la stabilità ed il corrispondente ordine di convergenza al variare di μ .

3. Data la formula di quadratura $I_n(f) = \sum_{i=0}^2 w_i f(x_i)$ relativa all'integrale $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Determinare l'ordine polinomiale di tale formula di quadratura con

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$w_0 = \frac{5}{9}, \quad w_1 = \frac{8}{9}, \quad w_2 = \frac{5}{9}$$

Si tratta di una formula Gaussiana? Se sì, quale?

4. Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare le matrici L ed U della fattorizzazione $LU = A$ e calcolare il determinante di A .