

Compito del 05/7/2010

1. Risolvere con una fattorizzazione LU il sistema lineare $Ax = b$

$$\begin{aligned}x_1 + 5x_2 &= 10, \\10x_1 + 51x_2 &= 5;\end{aligned}$$

e calcolare il numero di condizionamento nella norma $\|\cdot\|_\infty$. Maggiorare l'errore relativo sulla soluzione del sistema, supponendo un errore sul termine noto $\|\delta b\|_\infty \leq 10^{-7}$ [12 punti]

2. Si dimostri che per ogni terna di reali (y_0, y_1, y_2) esiste ed è unico il polinomio $P \in \Pi_2$ tale che

$$P(0) = y_0, P(0.5) = y_1, \int_0^1 P(x) dx = y_2.$$

[4 punti]

3. Si consideri il procedimento iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per la risoluzione di equazioni scalari del tipo $f(x) = 0$. Dimostrare che se la funzione f ha un flesso nella radice \bar{x} , il metodo di Newton, con $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, converge con ordine almeno cubico. [6 punti]

4. Per approssimare l'integrale

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x| dx,$$

si applichi la formula dei trapezi composta con intervalli di uguale ampiezza prima con 2 e poi con 3 intervalli. Si calcoli in entrambi i casi l'errore commesso confrontando l'approssimazione ottenuta con l'integrale esatto e si commenti il risultato. [8 punti]