

Compito del 31/1/2011

1. Data la funzione $g(x) = e^{f(x)}$ per $x \in [0, 1]$. Si dica se il calcolo di $g(x)$ è sempre ben condizionato nel caso in cui $f(x) = \sin(x)$ e $f(x) = \sqrt{x}$. [6 punti]

2. Determinare $t \in \mathbf{R}$ affinché il sistema lineare

$$\begin{aligned}tx_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\(t + 1)x_1 + 2x_3 &= -t, \\-x_1 - x_2 &= t + 3;\end{aligned}$$

ammetta una ed una sola soluzione. Supposto $t > 0$, determinare la soluzione del sistema con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting.

Verificare che la soluzione trovata soddisfi il sistema di partenza. [10 punti]

3. Dato un numero reale $a > 0$, discutere l'applicabilità del metodo di Newton alla funzione $f(x) = x^2 - a$ e indicare una scelta di x_0 in funzione di a tale che il metodo sia convergente. [6 punti]

4. Dato l'intervallo $[-1, 1]$ e la formula di quadratura

$$I(f) = \frac{2}{3}f(-a) + \frac{2}{3}f(0) + \frac{2}{3}f(a),$$

a) Determinare a tale da rendere massimo l'ordine polinomiale di tale formula e dire quanto vale.

b) Dire, motivando l'affermazione, se la formula di quadratura corrisponde all'integrale del polinomio di Lagrange costruito sui nodi $\{-a, 0, a\}$. [10 punti]