

Compito del 25/02/2008

[1] Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{pmatrix},$$

- a) Costruire la fattorizzazione di Cholesky della matrice A.
- b) Spiegare perché tale fattorizzazione non è possibile per ogni valore di α .

[10 punti]

[2] Calcolare il numero di condizionalmento di una matrice diagonale con autovalori $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n > 0$, applicando le diverse definizioni di norma matriciale, $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ e $\|A\|_\infty$.

[4 punti]

[3] In un metodo iterativo $x_{k+1} = g(x_k)$ per l'approssimazione numerica della equazione $f(x) = 0$, dimostrare che:
a) se $g(x) = x - \alpha f(x)^2$, con $f \in C^1$, non esiste alcun valore di α per cui si possa avere convergenza quadratica.

[6 punti]

[4] Sia data una formula di quadratura interpolatoria su $[-1, 1]$, basata su tre nodi simmetrici, $x_1 = -a$, $x_2 = 0$ e $x_3 = a$, con $a \in (0, 1)$, per il calcolo dell'integrale $I[f] \equiv \int_{-1}^1 f(x) dx$.

- a) Determinare i pesi α_i ($i = 1, 2, 3$) della formula di quadratura in funzione di a .
- b) Determinare il valore di a affinché la funzione $f(x) = x^4$ sia integrata correttamente.
- c) Giustificare che la formula di quadratura ottenuta è una quadratura di Gauss-Legendre.

[10 punti]