Tipi di ragionamento sui concetti

- *Soddisfacibilità:* un concetto C è soddisfacibile rispetto a $\mathcal{T}$ se c'è un modello $\mathcal{I}$ di $\mathcal{T}$ tale che $C^{\mathcal{I}}$ è non vuoto. In questo caso diciamo anche che $\mathcal{I}$ è un modello di C
- *Specializzazione:* un concetto C è più specifico di un concetto D rispetto a $\mathcal{T}$ se $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$, per ogni $\mathcal{I}$ modello di $\mathcal{T}$ ($C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$ o $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$)
- *Equivalenza:* due concetti C e D sono equivalenti rispetto a $\mathcal{T}$ se $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$, per ogni $\mathcal{I}$ modello di $\mathcal{T}$ ($C \equiv_{\mathcal{T}} D$ o $\mathcal{T} \models C \equiv D$)
- *Concetti disgiunti:* due concetti C e D sono disgiunti rispetto a $\mathcal{T}$ se $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$, per ogni $\mathcal{I}$ modello di $\mathcal{T}$

Riduzione alla Sussunzione

Tradizionalmente, il meccanismo di ragionamento di base fornito nei sistemi DL controllava la sussunzione dei concetti. Questo è sufficiente per implementare anche le altre inferenze

- C è insoddisfacibile $\Leftrightarrow$ C è sussunto da $\bot$
- C e D sono equivalenti $\Leftrightarrow$ C è sussunto da D e D è sussunto da C
- C e D sono disgiunti $\Leftrightarrow$ $C \sqcap D$ è sussunto da $\bot$

Gli enunciati valgono anche rispetto ad un TBox

Tutti i linguaggi di descrizione implementati nei sistemi DL attuali sono forniti dell'operatore "$\sqcap$" e contengono un concetto insoddisfacibile ("$\bot$"). Quindi se sono in grado di derivare la sussunzione, possono eseguire le quattro inferenze viste prima.

Riduzione all'Insoddisfacibilità

Se insieme all'intersezione, un sistema permette di formare la negazione di una descrizione, è possibile ridurre sussunzione, equivalenza e disgiunzione di concetti al problema della soddisfacibilità

- C è sussunto da $D \Leftrightarrow C \sqcap \neg D$ è insoddisfacibile
- C e D sono equivalenti $\Leftrightarrow C \sqcap \neg D$ e $\neg C \sqcap D$ sono entrambi insoddisfacibili
- C e D sono disgiunti $\Leftrightarrow C \sqcap D$ è insoddisfacibile

Gli enunciati valgono anche rispetto ad un TBox

Eliminazione dei TBox

- Nelle applicazioni i concetti vengono generalmente definiti all'interno di una TBox
- Tuttavia, per sviluppare le procedure di ragionamento è concettualmente più semplice assumere che il TBox sia vuoto
- Quando un TBox $\mathcal{T}$ è aciclico possiamo sempre ridurre i problemi di ragionamento rispetto a $\mathcal{T}$ a problemi rispetto al TBox vuoto
- Un TBox $\mathcal{T}$ aciclico è equivalente ad un TBox $\mathcal{T}'$ in cui tutti i concetti sono definiti solo in termini di nomi di base
- Per ogni C, D definiamo le espansioni di C e di D rispetto a $\mathcal{T}$ con C' e D' ottenuti da C e da D sostituendo ogni occorrenza di A con il concetto B, dove $A \equiv B$ è la definizione di A in $\mathcal{T}'$

Si ha che:

- $C \equiv_{\mathcal{T}} C'$ e $D \equiv_{\mathcal{T}} D'$
- C è soddisfacibile rispetto a $\mathcal{T}$ sse C' è soddisfacibile
- Quindi $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$ sse $C' \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D'$ e
- $C \equiv_{\mathcal{T}} D$ sse $C' \equiv_{\mathcal{T}} D'$ e pertanto poiché C' e D' contengono solo simboli di base,
- $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ sse $\models C' \sqsubseteq D'$
- $\mathcal{T} \models C \equiv D$ sse $\models C' \equiv D'$.
- Analogamente C e D sono disgiunti rispetto a $\mathcal{T}$ sse C' e D' sono disgiunti

Ragionare sugli ABox

Un ABox $\mathcal{A}$ è *consistente rispetto ad un TBox* $\mathcal{T}$, se c'è una interpretazione che è un modello sia di $\mathcal{A}$ che di $\mathcal{T}$.

$\mathcal{A}$ è *consistente* se è consistente rispetto ad un TBox vuoto.

Instance checking: verificare se un'asserzione α è implicata da un ABox $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A} \models \alpha$)

Sia $\alpha = C(a)$, il problema di instance checking può essere ridotto a quello della consistenza per ABox:
$\mathcal{A} \models C(a)$ se e solo se $\mathcal{A} \cup \{\neg C(a)\}$ è inconsistente

Il problema della soddisfacibilità dei concetti può essere ridotto a quello della consistenza per ABox:
C è soddisfacibile se e solo se $\{C(a)\}$ è consistente (a arbitrario)

Forma normale negativa

Un concetto è in forma normale negativa se contiene il simbolo di negazione $\neg$ solo davanti ai concetti atomici. È possibile trasformare (in tempo lineare) un concetto C qualunque in un altro che chiamiamo $\mathsf{FNN}(C)$ che è in forma normale negativa e che è equivalente a C

Per fare tale trasformazione basta applicare le seguenti regole di riscrittura in qualunque ordine finché possibile

Forma normale negativa

- $\neg\neg C \rightarrow C$
- $\neg(C \sqcup D) \rightarrow \neg C \sqcap \neg D$
- $\neg(C \sqcap D) \rightarrow \neg C \sqcup \neg D$
- $\neg\forall R.C \rightarrow \exists R.\neg C$
- $\neg\exists R.C \rightarrow \forall R.\neg C$
- $\neg \geq_{n+1} R \rightarrow \leq_n R$
- $\neg \leq_n R \rightarrow \geq_{n+1} R$
- $\neg \geq_{n+1} R.C \rightarrow \leq_n R.C$
- $\neg \leq_n R.C \rightarrow \geq_{n+1} R.C$