

Chapter 1

CENNI DI TOPOLOGIA GENERALE

1.1 Spazi topologici

Definizione 1.1.1 Una **topologia** o **struttura topologica** su un insieme X é un sottoinsieme τ dell'insieme potenza $\mathcal{P}(X)$ di X , verificante i seguenti assiomi:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. se $\{X_i\}_{i \in I}$, dove I 'e un insieme qualunque, é tale che $\forall i \in I X_i \in \tau$ allora $\bigcup_{i \in I} X_i \in \tau$;
3. se $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é tale che $X_i \in \tau$ per $i = 1, 2, \dots, n$ allora $\bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \in \tau$.

Gli elementi di τ si chiamano **insiemi aperti**.

Definizione 1.1.2 Un insieme X con una struttura topologica τ , si chiama **spazio topologico**. Gli elementi di X verranno chiamati **punti** di X .

Definizione 1.1.3 Se X é uno spazio topologico e $x \in X$, un sottoinsieme Y di X si chiama **intorno** di x quando esiste un aperto A tale che $x \in A \subseteq Y$.

Dalla definizione precedente segue che ogni insieme aperto é intorno di ogni suo punto.

Definizione 1.1.4 Sia X uno spazio topologico, un sottoinsieme C di X , si dice **chiuso** quando il suo complementare $X - C$ é un insieme aperto.

Denotata con σ la famiglia di tutti gli insiemi chiusi di uno spazio topologico X e tenedo conto della proprietá della teoria degli insiemi

$$\forall Y \subseteq X, \quad X - (X - Y) = Y, \quad (1.1)$$

vale la seguente

Proposizione 1.1.1 Le famiglie σ e τ , si ottengono per complementazione l'una dall'altra, nel senso che ogni chiuso é il complementare di un aperto e ogni aperto é il complementare di un chiuso.

Passando ai complementi nella definizione 1.1.1 e tenendo conto della ben nota proprietá della teoria degli insiemi secondo cui il complemento dell'unione coincide con l'intersezione dei complementi e il complemento dell'intersezione coincide con l'unione dei complementi, si dimostra la seguente

Proposizione 1.1.2 La famiglia σ degli insiemi chiusi in uno spazio topologico X é caratterizzata dalle seguenti condizioni

1. $\emptyset, X \in \sigma$;
2. se $\{X_i\}_{i \in I}$, dove I 'e un insieme qualunque, é tale che $\forall i \in I X_i \in \sigma$ allora $\bigcap_{i \in I} X_i \in \sigma$;
3. se $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ é tale che $X_i \in \sigma$ per $i = 1, 2, \dots, n$ allora $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \in \sigma$.

Proposizione 1.1.3 Sia X un insieme e σ un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ verificante le proprietá della proposizione 1.1.2, allora esiste una ed una sola topologia τ su X tale che la famiglia degli insiemi chiusi coincide con σ .

Dimostrazione. La famiglia τ dei sottoinsiemi di X che sono complementi di elementi di σ , ovviamente verifica le condizioni della definizione 1.1.1, quindi definisce una topologia su X . Per la (1.1), la famiglia degli insiemi chiusi per τ coincide con σ . Sia τ' un'altra topologia su X la cui famiglia di chiusi coincide con σ . Poiché τ e τ' hanno gli stessi insiemi chiusi, devono coincidere, infatti se A è un aperto per una delle due topologie, allora $B = X - A \in \sigma$, quindi esiste un aperto A' per l'altra topologia tale che $B = X - A'$, da cui $X - A = X - A'$ e quindi $A = A'$. •

Grazie alla proposizione precedente è immediato concludere che una topologia può essere equivalentemente definita mediante la famiglia degli insiemi chiusi. Quindi una definizione alternativa di topologia può essere la seguente

Definizione 1.1.5 Una **topologia o struttura topologica** su un insieme X è un sottoinsieme σ dell'insieme potenza $\mathcal{P}(X)$ di X , verificante i seguenti assiomi:

1. $\emptyset, X \in \sigma$;
2. se $\{X_i\}_{i \in I}$, dove I è un insieme qualunque, è tale che $\forall i \in I X_i \in \sigma$ allora $\bigcap_{i \in I} X_i \in \sigma$;
3. se $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ è tale che $X_i \in \sigma$ per $i = 1, 2, \dots, n$ allora $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \in \sigma$.

Gli elementi di σ si chiamano **insiemi chiusi**.

Esempio 1 Se X è un insieme qualunque, la famiglia $\tau = \{\emptyset, X\}$ verifica banalmente le proprietà della definizione 1.1.1, quindi definisce una topologia che si chiama **topologia indiscreta**. Su un insieme X con un solo elemento si può definire solo la topologia indiscreta, perché il suo insieme potenza è costituito solo da X e dall'insieme vuoto.

Esempio 2 Se X è un insieme qualunque, la famiglia $\tau = \mathcal{P}(X)$ verifica banalmente le proprietà della definizione 1.1.1, quindi definisce una topologia che si chiama **topologia discreta**. Su un insieme X con un solo elemento, topologia discreta ed indiscreta coincidono.

Nei due esempi precedenti la famiglia σ degli insiemi chiusi ovviamente coincide con τ .

Esempio 3 Sia X un insieme qualunque e sia τ la famiglia costituita dai sottoinsiemi finiti di X , da X e dall'insieme vuoto. τ verifica le condizioni della definizione 1.1.5 (esercizio), quindi definisce una topologia su X . In particolare se X è finito, la topologia così definita è la topologia discreta.

Esempio 4 Si ricorda che uno **spazio metrico** è un insieme X su cui è definita una **distanza**, cioè un'applicazione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ verificante, per ogni scelta di $x, y, z \in X$, le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) = d(y, x)$;
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; (disuguaglianza triangolare)
3. $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Fissato un punto $x \in X$ e un $\epsilon > 0$, si chiama **disco di centro x e raggio ϵ** l'insieme $S(x, \epsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \epsilon\}$. Se $x \in Y \subseteq X$, si dice che x è un **punto interno** di Y se $\exists \epsilon > 0$ tale che $S(x, \epsilon) \subseteq Y$. L'**interno** di un insieme Y è l'insieme dei suoi punti interni e si indica con Y° . Ovviamente $Y^\circ \subseteq Y$ è sempre verificata, se invece accade che $Y^\circ = Y$, allora si dice che Y è un **insieme aperto**.

Se (X, d) è uno spazio metrico, la famiglia τ dei suoi insiemi aperti verifica le condizioni della definizione 1.1.1 (esercizio), quindi definisce una topologia i cui insiemi aperti sono tutti e soli gli insiemi aperti definiti dalla distanza.

Quindi si può concludere che

Proposizione 1.1.4 Ogni spazio metrico è uno spazio topologico.

Su un dato insieme X , in generale, è possibile definire più di una topologia, scegliendo diversi insiemi τ verificanti le condizioni della definizione 1.1.1. Per esempio sull'insieme \mathbb{R} dei numeri reali è possibile definire tutte le topologie introdotte negli esempi precedenti: la topologia discreta, indiscreta, dei sottoinsiemi finiti ed, essendo \mathbb{R} uno spazio metrico, anche quella indotta dalla distanza. Nel seguito se non espressamente specificato si intende che la topologia di \mathbb{R} è quella determinata dalla distanza. La stessa cosa vale in \mathbb{R}^n .

Definizione 1.1.6 Siano τ_1 e τ_2 due topologie sullo stesso insieme X . Si dice che τ_1 è **più fine** di τ_2 o equivalentemente che τ_2 è **meno fine** di τ_1 se $\tau_2 \subseteq \tau_1$.

Così, per esempio dato un insieme X , la topologia indiscreta è quella meno fine definibile su X , mentre la topologia discreta è quella più fine.

Definizione 1.1.7 Sia X un spazio topologico e τ la topologia di X , se Y é un sottoinsieme non vuoto di X , allora la famiglia $\tau' = \{Y \cap U \mid U \in \tau\} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ verifica in Y , le condizioni della definizione 1.1.1, quindi definisce una topologia in Y . Lo spazio topologico cosí definito si chiama **sottospazio topologico** di X e la topologia τ' si chiama **topologia indotta** da τ .

Esempio 5 Consideriamo \mathbb{R}^3 , utilizzando la definizione precedente, su ogni sottoinsieme Y di \mathbb{R}^3 si può introdurre la topologia indotta. In questo modo si possono dotare di topologia tutte le curve e le superfici di \mathbb{R}^3 .

1.2 Chiusura, punti di accumulazione, sottoinsiemi densi

Definizione 1.2.1 Se A é un sottoinsieme di uno spazio topologico X , si chiama **chiusura** di A e si indica con \bar{A} l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi contenenti A .

Dalla definizione precedente segue immediatamente che

$$A \subseteq \bar{A}. \quad (1.2)$$

Proposizione 1.2.1 Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X é chiuso se e solo se $A = \bar{A}$.

Dimostrazione. Poiché, per definizione, \bar{A} é l'intersezione di un insieme di chiusi, esso é chiuso, quindi da $A = \bar{A}$ segue che A é chiuso. Viceversa, se A é chiuso, allora $\bar{A} \subseteq A$ essendo A uno dei chiusi che contengono A e, dalla 1.2, segue la tesi. •

Definizione 1.2.2 Se A é un sottoinsieme di uno spazio topologico X e $x \in X$, si dice che x é un **punto di accumulazione** o **punto limite** per A se ogni intorno di x interseca A in almeno un punto diverso da x . L'insieme dei punti di accumulazione di A si chiama **derivato** di A e si indica con il simbolo $D(A)$.

Proposizione 1.2.2 Se A é un sottoinsieme di uno spazio topologico X , allora $D(A) \subseteq \bar{A}$.

Dimostrazione. Basta dimostrare che se x non appartiene a \bar{A} allora non appartiene a $D(A)$. Se x non appartiene a \bar{A} , esiste un chiuso $D \supseteq A$ non contenente x , da cui segue che $x \in X - D$, $(X - D) \cap A = \emptyset$ e $X - D$ é aperto, quindi é stato trovato un intorno aperto di x che non interseca A , perciò x non é un punto di accumulazione di A . •

Definizione 1.2.3 Un sottoinsieme D di uno spazio topologico X si dice **denso** in X se $\bar{D} = X$.

Esempio 6 L'insieme Q dei numeri razionali e l'insieme $\mathbb{R} - Q$ degli irrazionali sono densi in \mathbb{R} .

Proposizione 1.2.3 D é denso in X se e solo se per ogni aperto non vuoto A di X , $A \cap D \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Se D é denso in X e A é un insieme aperto e non vuoto tale che $A \cap D = \emptyset$, allora $X - A$ é un insieme chiuso, distinto da X contenente D , ma ciò é assurdo perché, essendo D denso, il piú piccolo insieme chiuso che lo contiene é X . Viceversa, supponiamo che per ogni aperto non vuoto A , $A \cap D \neq \emptyset$, allora se C é un insieme chiuso diverso da X , $X - C$ é aperto non vuoto, quindi $(X - C) \cap D \neq \emptyset$, da cui si deduce che D non può essere contenuto in C , questo significa che l'unico insieme chiuso contenente D é X , da cui $\bar{D} = X$. •

1.3 Basi di una topologia

In generale l'insieme τ é molto ampio. Si pensi, per esempio a \mathbb{R}^n , anche se é sempre possibile, dato un sottoinsieme, decidere se esso é aperto o no, la famiglia di tutti gli insiemi aperti é molto grande e difficilmente visualizzabile nel suo insieme. Nasce quindi l'esigenza di poter caratterizzare la famiglia degli aperti con una sottofamiglia piú facilmente visualizzabile.

Definizione 1.3.1 Si chiama **base** di uno spazio topologico X , una famiglia \mathcal{B} di aperti non vuoti, tale che ogni aperto di X si possa esprimere come unione di aperti di \mathcal{B} .

Teorema 1.3.1 Se \mathcal{B} é una base dello spazio topologico X , valgono le seguenti proprietà:

1. $\forall x \in X \quad \exists B \in \mathcal{B} \quad \text{t.c.} \quad x \in B \quad \Leftrightarrow \quad X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$;
2. se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ e $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, se $x \in B_1 \cap B_2$ allora $\exists B \in \mathcal{B}$ tale che $x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Dimostrazione. La prima segue immediatamente dalla definizione di base e dal fatto che X é un insieme aperto. Per dimostrare la seconda basta osservare che $B_1 \cap B_2$ é un aperto non vuoto di X ed in quanto tale esprimibile come unione di elementi di \mathcal{B} . •

Esempio 7 Una base di \mathbb{R}^n é data dall'insieme $\mathcal{B} = \{S(x, \epsilon) \mid x \in \mathbb{R}^n, \epsilon \in \mathbb{R}^+\}$. Infatti, se A é un aperto di \mathbb{R}^n , $\forall x \in A \quad \exists \epsilon_x > 0 \quad \text{t.c.} \quad S(x, \epsilon_x) \subseteq A$, da cui $\bigcup_{x \in A} S(x, \epsilon_x) \subseteq A$, poiché l'inclusione inversa é ovviamente vera, si ottiene $\bigcup_{x \in A} S(x, \epsilon_x) = A$.

1.4 Spazi topologici separabili ed a base numerabile

Definizione 1.4.1 Uno spazio topologico X si dice **a base numerabile**, se ammette una base di cardinalità \aleph_0 .

Definizione 1.4.2 Uno spazio topologico X si dice **separabile**, se ha un sottoinsieme denso e numerabile.

Proposizione 1.4.1 Uno spazio topologico X a base numerabile é separabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un punto $x_n \in B_n$ e consideriamo l'insieme $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$. Ovviamente D é numerabile, se si dimostra che D interseca ogni insieme aperto non vuoto, allora, per la proposizione 1.2.3, esso é denso e quindi il teorema resta dimostrato. Sia A un insieme aperto non vuoto, poiché \mathcal{B} é una base, A é dato dall'unione di elementi di \mathcal{B} , ma ciascun elemento di \mathcal{B} interseca D in almeno un punto, quindi $A \cap D \neq \emptyset$. •

Se X é uno spazio metrico, la proposizione precedente si può invertire.

Proposizione 1.4.2 Se X é uno spazio metrico separabile, allora é a base numerabile.

Dimostrazione. Sia $D = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sottoinsieme di X denso e numerabile che deve esistere per ipotesi. Consideriamo l'insieme di dischi $\mathcal{B} = \{S(x_n, q) \mid x_n \in D, q \in \mathbb{Q}^+\}$ che ovviamente é numerabile. Se si dimostra che \mathcal{B} é una base allora il teorema resta dimostrato.

Sia A un aperto di X e $x \in A$, esiste un $\epsilon > 0$ tale che $S(x, \epsilon) \subseteq A$. Poiché D é denso in X , ogni disco di centro x deve intersecare D , quindi esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{4}$. Scelto un $q \in \mathbb{Q}$ tale che $\frac{\epsilon}{4} < q < \frac{\epsilon}{2}$, dimostriamo che

$$x \in S(x_n, q) \subseteq S(x, \epsilon). \quad (1.3)$$

Ovviamente $x \in S(x_n, q)$ perché $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{4} < q$. Se $y \in S(x_n, q)$, $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\epsilon}{4} + q < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$, quindi $y \in S(x, \epsilon)$.

Grazie alla 1.3 si può concludere che $\forall x \in A \quad \exists x_n \in D, q \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{t.c.} \quad x \in S(x_n, q) \subseteq A$, da cui si ricava che A é uguale all'unione di elementi di \mathcal{B} . •

Esempio 8 \mathbb{R}^n é uno spazio metrico separabile perché \mathbb{Q}^n é un sottoinsieme denso e numerabile. Quindi, grazie alla proposizione precedente, si può concludere che \mathbb{R}^n é a base numerabile e quest'ultima é l'insieme $\mathcal{B} = \{S(x, q) \mid x \in \mathbb{Q}^n, q \in \mathbb{Q}^+\}$.

Proposizione 1.4.3 Se X é uno spazio metrico separabile, ogni suo sottospazio Y é separabile ed a base numerabile.

Dimostrazione. Per la proposizione 1.4.2, X é a base numerabile. Denotata con $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la base numerabile di X , l'insieme $\mathcal{B}_Y = \{Y \cap B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é una base numerabile per Y ed inoltre per la proposizione 1.4.1, Y é separabile. •

Da quest'ultima proposizione segue che ogni sottospazio di \mathbb{R}^n é separabile ed a base numerabile.

Esempio 9 Una base di insiemi aperti su ogni superficie, di dimensione k , Σ^k ($k < n$) di \mathbb{R}^n é costituita dalla famiglia delle intersezioni tra i dischi $S(x, \epsilon)$ e Σ^k , che si può rendere numerabile, limitandosi ai dischi della base numerabile di \mathbb{R}^n . Così, per esempio, una base di insiemi aperti su una sfera S^2 é costituita da calotte sferiche aperte, mentre su una circonferenza S^1 , é costituita da archi di circonferenza aperti.

1.5 Spazi di Hausdorff

Definizione 1.5.1 Uno spazio di Hausdorff é uno spazio topologico nel quale comunque si scelgano due punti x e y , esiste un intorno U di x ed un intorno V di y tali che $U \cap V = \emptyset$.

La seguente proposizione mette in luce una vasta classe di spazi di Hausdorff.

Proposizione 1.5.1 Ogni spazio metrico é uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. Sia X uno spazio metrico e x, y due punti di X . Fissato un numero positivo ϵ tale che $2\epsilon \leq d(x, y)$, si vede immediatamente che $S(x, \epsilon) \cap S(y, \epsilon) = \emptyset$. Infatti se ciò non fosse vero, dovrebbe esistere un punto $z \in S(x, \epsilon) \cap S(y, \epsilon)$, da cui si otterrebbe $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon$, in chiara contraddizione con la scelta di ϵ . •

Esempio 10 Lo spazio topologico \mathbb{R}^n , in quanto spazio metrico é di Hausdorff.

Esempio 11 La topologia dell'esempio 3, se X é un insieme infinito non é di Hausdorff, infatti in tale topologia, gli aperti sono i complementi degli insiemi finiti, quindi non esistono due insiemi aperti disgiunti, pertanto questa topologia non può essere di Hausdorff.

Proposizione 1.5.2 Ogni sottospazio di uno spazio di Hausdorff é uno spazio di Hausdorff.

Dimostrazione. Se Y é un sottospazio di uno spazio di Hausdorff X , scelti due punti $x, y \in Y$, esistono due intorni U e V rispettivamente di x e y in X , tali che $U \cap V = \emptyset$. Allora $U \cap Y$ e $V \cap Y$ sono due intorni in Y , rispettivamente di x e y , disgiunti. •

1.6 Spazi connessi

Definizione 1.6.1 Uno spazio topologico X si dice **connesso** se non é esprimibile come unione di due aperti non vuoti e disgiunti.

Proposizione 1.6.1 Uno spazio topologico X é connesso se e solo se vale una delle seguenti condizioni:

1. non esiste un sottoinsieme A di X diverso da \emptyset e da X che é sia aperto che chiuso;
2. non esistono due chiusi non vuoti e disgiunti F e G , tali che $X = F \cup G$.

Dimostrazione. Se X non é connesso esistono due insiemi aperti e non vuoti A e B tali che $A \cap B = \emptyset$ e $X = A \cup B$, allora, poiché $B = X - A$, l'insieme B é aperto e chiuso; inoltre gli insiemi chiusi $X - A$ e $X - B$ sono tali che $(X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B) = X - X = \emptyset$ e $(X - A) \cup (X - B) = X - (A \cap B) = X$.

Viceversa, se non é verificata la prima, allora esiste un sottoinsieme A di X che é aperto e chiuso, quindi l'insieme $B = X - A$ é aperto ed inoltre $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = X$, quindi X non é connesso. Se invece non é verificata la seconda, esistono due chiusi non vuoti F e G tali che $F \cap G = \emptyset$ e $F \cup G = X$, allora gli insiemi $A = X - F$ e $B = X - G$ sono aperti non vuoti ed inoltre $A \cap B = (X - F) \cap (X - G) = X - (F \cup G) = \emptyset$ e $A \cup B = (X - F) \cup (X - G) = X - (F \cap G) = X$, quindi X non é connesso. •

Definizione 1.6.2 Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X si dice **insieme connesso** se come sottospazio di X é connesso.

Proposizione 1.6.2 Un sottoinsieme di \mathbb{R} é connesso se e solo se é un intervallo. In particolare \mathbb{R} é connesso. (Senza dimostrazione).

1.7 Spazi compatti e paracompatti

Definizione 1.7.1 Una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{Y} = \{Y_i\}_{i \in I}$ di uno spazio topologico X , si dice che é un **ricoprimento** di X quando $X = \bigcup_{i \in I} Y_i$. In particolare se gli insiemi Y_i sono aperti, \mathcal{Y} si chiama **ricoprimento aperto**. Un **sottoricoprimento** di \mathcal{Y} é un sottoinsieme di \mathcal{Y} che é ancora un ricoprimento di X .

Definizione 1.7.2 Uno spazio topologico si dice **compatto** se da ogni ricoprimento aperto si può estrarre un sottoricoprimento finito.

Esempio 12 Lo spazio topologico \mathbb{R} non é compatto, infatti la famiglia degli intervalli aperti di centro intero e raggio 2, é un ricoprimento aperto di \mathbb{R} che non ammette un sottoricoprimento finito

Definizione 1.7.3 Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X si dice **compatto**, se Y con la topologia indotta é compatto.

Proposizione 1.7.1 In uno spazio compatto X , ogni sottoinsieme infinito ha almeno un punto di accumulazione.

Dimostrazione. Sia L un sottoinsieme di X privo di punti di accumulazione, questo significa che per ogni $x \in X$ esiste un intorno aperto U_x di X , tale che $U_x \cap L$ o é vuoto o al piú é lo stesso x . La famiglia $\{U_x\}_{x \in X}$ é ovviamente un ricoprimento aperto di X ed essendo X compatto, esiste un insieme finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ di punti di X tali che $\bigcup_{i=1, \dots, n} U_{x_i} = X$. Questo implica che L é finito, infatti $L = L \cap X = L \cap \bigcup_{i=1, \dots, n} U_{x_i} = \bigcup_{i=1, \dots, n} (L \cap U_{x_i}) \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. •

Proposizione 1.7.2 I compatti di \mathbb{R} sono tutti e soli i suoi sottoinsiemi chiusi e limitati. (Senza dimostrazione).

In particolare dalla proposizione precedente segue che gli intervalli chiusi e limitati di \mathbb{R} sono compatti. Questa proprietà ha una generalizzazione in \mathbb{R}^n .

Proposizione 1.7.3 In \mathbb{R}^n ogni sottoinsieme del tipo $P = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid a^i \leq x^i \leq b^i \ i = 1, 2, \dots, n\} = \prod_{i=1}^n [a^i, b^i]$ é compatto.

Definizione 1.7.4 Siano $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ e $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ due ricoprimenti di uno spazio topologico X , si dice che \mathcal{V} é **piú fine** di \mathcal{U} o equivalentemente che \mathcal{V} é un **raffinamento** di \mathcal{U} , se $\forall V \in \mathcal{V} \exists U \in \mathcal{U}$ tale che $V \subseteq U$.

Definizione 1.7.5 Un ricoprimento $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ di uno spazio topologico X si dice **localmente finito** se $\forall x \in X$ esiste un intorno U di x , che interseca solo un numero finito di elementi di \mathcal{V} .

Definizione 1.7.6 Uno spazio topologico X si dice **paracompatto** se é di Hausdorff e se, ogni ricoprimento aperto \mathcal{U} di X ammette un raffinamento \mathcal{V} localmente finito.

La condizione di paracompattatezza é piú debole di quella di compattezza, infatti é immediato constatare che uno spazio topologico di Hausdorff e compatto é paracompatto, ed é abbastanza generale da includere gli spazi euclidei \mathbb{R}^n .

Proposizione 1.7.4 Lo spazio topologico \mathbb{R}^n é paracompatto. (Senza dimostrazione).

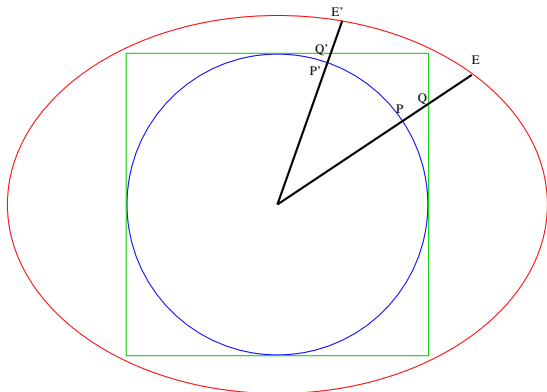


Figure 1.1: Esempi di omeomorfismi

1.8 Funzioni continue

Definizione 1.8.1 Siano X e X' due spazi topologici e $f : X \rightarrow X'$ un'applicazione da X in X' . Si dice che l'applicazione f é continua se, per ogni aperto A di X' , l'immagine inversa $f^{-1}(A)$ é un aperto in X .

Esempio 13 Se $X = X' = \mathbb{R}$, si può vedere che la continuità di f secondo la definizione precedente implica la continuità nel senso ordinario, in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$, cioè $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x) \in]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$. Infatti, fissato un qualunque $x_0 \in \mathbb{R}$, se ϵ é un numero positivo qualunque, allora l'intervallo $A =]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$ é un aperto di \mathbb{R} , quindi, essendo f continua, la sua immagine inversa $f^{-1}(A)$ é aperto in \mathbb{R} ed inoltre $x_0 \in f^{-1}(A)$. Questo significa che x_0 é un punto interno di $f^{-1}(A)$, quindi esiste un $\delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq f^{-1}(]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[)$, da cui $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\implies f(x) \in]f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon[$.

Teorema 1.8.1 Se X, X' e X'' sono tre spazi topologici e $f : X \rightarrow X', g : X' \rightarrow X''$ due funzioni continue allora la funzione composta $g \circ f : X \rightarrow X''$ definita da $g \circ f(x) = g(f(x)) \forall x \in X$, é continua.

Dimostrazione. Se A é un insieme aperto di X'' allora, essendo f e g continue, $g^{-1}(f^{-1}(A))$ é un aperto di X . D'altra parte, dalla ovvia eguaglianza $(g \circ f)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A))$, segue che l'immagine inversa mediante la $g \circ f$ dell'aperto A é un insieme aperto, da cui la tesi. •

Teorema 1.8.2 Se X e X' sono due spazi topologici, $f : X \rightarrow X'$ é continua se e solo se l'immagine inversa di ogni chiuso di X' é un chiuso di X ,

Dimostrazione. Il teorema segue dalla ovvia eguaglianza

$$\forall Y \subseteq X' \quad f^{-1}(X' - Y) = X - f^{-1}(Y). \quad (1.4)$$

Se f é continua e Y é un insieme chiuso di X' , allora $X' - Y$ é aperto in X' , quindi $f^{-1}(X' - Y)$ é aperto in X , da cui, per la 1.4, $f^{-1}(Y)$ é chiuso in X . Viceversa supponiamo che l'immagine inversa di ogni chiuso in X' sia un chiuso in X , allora, fissato un aperto Y in X' , $X' - Y$ é chiuso in X' , quindi $f^{-1}(X' - Y)$ é chiuso in X , da cui, per la 1.4, $f^{-1}(Y)$ é aperto in X . •

Proposizione 1.8.1 Siano X e X' due spazi topologici e $f : X \rightarrow X'$. Sia $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una base di X' . f é continua se e solo se $\forall i \in I \ f^{-1}(U_i)$ é un aperto di X .

Dimostrazione. Se f é continua, la condizione é ovviamente verificata. Viceversa, se la condizione é verificata e A é un aperto di X' , allora $A = \bigcup_{j \in J} U_j$ con $J \subseteq I$, da cui $f^{-1}(A) = f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$, che é un'unione di aperti e quindi un aperto. •

Definizione 1.8.2 Siano X e X' due spazi topologici, un'applicazione $f : X \rightarrow X'$ si chiama **omeomorfismo** se é continua, bigettiva e la sua inversa $f^{-1} : X' \rightarrow X$ é continua. Se esiste un omeomorfismo tra X e X' , si dice che i due spazi topologici sono **omeomorfi**.

Osservazione 1 Un omeomorfismo tra due spazi topologici X e X' , non solo stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di X e X' , ma anche tra i loro insiemi aperti (chiusi). Questo significa che due spazi topologici omeomorfi, anche se definiti in maniera totalmente differente, sono indistinguibili da un punto di vista topologico. La nozione di omeomorfismo in topologia ha la stessa funzione della nozione di isomorfismo in algebra.

Esempio 14 *Le applicazioni ($P \rightarrow Q$, $P \rightarrow E$, $Q \rightarrow E$) illustrate nella figura 1.1 tra cerchio, quadrato ed ellisse, sono ovviamente corrispondenze biunivoche ed inoltre tenendo conto che una base di insiemi aperti su ciascuna figura é costituita dalle sue intersezione con i dischi aperti di \mathbb{R}^2 , per la proposizione 1.8.1 sono anche continue con le loro inverse. Quindi cerchio, quadrato ed ellisse sono omeomorfi. Con la stessa costruzione, si puó vedere che sfera, cubo ed ellissoide sono superfici omeomorfe.*

Per dimostrare che due spazi topologici sono omeomorfi, basta determinare un omeomorfismo, per dimostrare che non sono omeomorfi, non potendo verificare che tutte le applicazioni dall'uno all'altro non sono omeomorfismi, si utilizzano proprietà o strutture invarianti per omeomorfismo. Per esempio appurato che la compattezza é una proprietà invariante per omeomorfismi nel senso che che uno spazio topologico é compatto, tutti gli spazi topologici ad esso omeomorfi sono compatti, si puó affermare immediatamente che la sfera non é omeomorfa al piano perché il secondo non é compatto, mentre la prima come sottospazio chiuso e limitato di \mathbb{R}^3 é compatta.

Un'altra proprietà invariante per omeomorfismo é la connessione, cosí due spazi topologici di cui uno é connesso e l'altro no, non possono essere omeomorfi.

Chapter 2

GEOMETRIA DIFFERENZIALE

2.1 Varietá differenziabili

Definizione 2.1.1 Uno spazio topologico X si dice **localmente euclideo** di dimensione $n \in \mathbb{N}$ se $\forall x \in X$, esiste un intorno aperto U di x , omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n .

Definizione 2.1.2 Si chiama **varietá topologica** di dimensione $n \in \mathbb{N}$ e verrà indicata con il simbolo M_n , uno spazio topologico di Hausdorff, localmente euclideo di dimensione n ed a base numerabile.

Teorema 2.1.1 Una varietá topologica é paracompatta. (Senza dimostrazione.)

Osservazione 2 La nozione di varietá topologica di dimensione n é una generalizzazione di spazio euclideo \mathbb{R}^n , infatti M_n é di Hausdorff, a base numerabile e paracompatto come \mathbb{R}^n e localmente indistinguibile da \mathbb{R}^n . Ma é una generalizzazione non banale, infatti su una varietá topologica non si può introdurre in maniera immediata una struttura di spazio metrico.¹

Esempio 15 L'esempio piú ovvio di varietá topologica é \mathbb{R}^n .

Esempio 16 Sia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ la circonferenza di centro l'origine e raggio $R > 0$ con la topologia indotta da \mathbb{R}^2 . In questa topologia, una base di insiemi aperti é costituita dagli archi di circonferenza privati degli estremi. Poiché $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ e \mathbb{R}^2 é di Hausdorff, per la proposizione 1.5.2 anche S^1 é di Hausdorff. Nell'esempio 8 si é visto che \mathbb{R}^n é a base numerabile e per la proposizione 1.4.3 lo é anche ogni suo sottospazio, quindi S^1 é a base numerabile. Inoltre fissati i punti $N = (0, R)$ e $S = (0, -R)$ gli insiemi $U = S^1 - \{N\}$ e $V = S^1 - \{S\}$ costituiscono un ricoprimento aperto di S^1 , quindi ogni punto di S^1 ha, tra i suoi intorni aperti, o U o V o entrambi. Se si dimostra che U e V sono omeomorfi ad un aperto di \mathbb{R} , resta dimostrato che S^1 é localmente euclideo di dimensione 1 e, per quanto detto prima, che é una varietá topologica di dimensione 1.

Consideriamo la retta \mathbb{R}_S tangente ad S^1 in S e consideriamo la **proiezione stereografica** $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}_S$ definita dalla seguente legge (fig. 2.1): $\forall P \in U$, $\varphi(P)$ é l'unico punto in cui la retta passante per N e P interseca la retta \mathbb{R}_S . É immediato constatare che tale applicazione é iniettiva ed é su tutto \mathbb{R}_S e la funzione inversa φ^{-1} é l'applicazione che ad ogni $Q \in \mathbb{R}_S$ associa l'unico punto in cui la retta individuata da N e da Q incontra S^1 . Inoltre, poiché l'immagine inversa mediante la φ di un intervallo aperto di \mathbb{R}_S é un arco di circonferenza aperto di S^1 , tale funzione, per la proposizione 1.8.1, é continua. Analogamente, l'immagine inversa mediante la φ^{-1} di un arco di circonferenza aperto é un intervallo aperto in \mathbb{R}_S , quindi, per la proposizione 1.8.1, anche φ^{-1} é continua. Resta cosí dimostrato che φ é un omeomorfismo tra U e \mathbb{R} . Con la stessa costruzione, utilizzando la retta tangente a S^1 in N (fig. 2.1), si dimostra che V é omeomorfo a \mathbb{R} .

Quanto detto per S^1 vale anche per la sfera $S^{n-1} = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 = R^2\}$. La proiezione stereografica é una semplice generalizzazione di quella della circonferenza. Per esempio per $n = 3$, si considerano i punti $N = (0, 0, R)$ e $S = (0, 0, -R)$, gli aperti $U = X - \{N\}$ e $V = X - \{S\}$, che costituiscono un ricoprimento di S^2 . L'applicazione φ da U nel piano π_S , tangente a S^2 in S , che ad ogni $P \in S^2$ associa l'unico punto $\varphi(P)$ in cui la retta passante per N e P incontra il piano π_S , é un omeomorfismo tra U e \mathbb{R}^2 . E analogamente l'applicazione ψ da V nel piano π_N , tangente a S^2 in N , che ad ogni $P \in S^2$ associa l'unico punto $\psi(P)$ in cui la retta passante per S e P incontra il piano π_N , é un omeomorfismo tra V e \mathbb{R}^2 .

Definizione 2.1.3 Sia M_n una varietá topologica, U un aperto di X omeomorfo ad un aperto di \mathbb{R}^n e φ l'omeomorfismo. La coppia (U, φ) si chiama **carta** o **carta locale** su X e U si chiama **dominio** della carta.

¹l'introduzione di strutture aggiuntive su una varietá topologica, consentono, in certi casi, di definire una distanza.

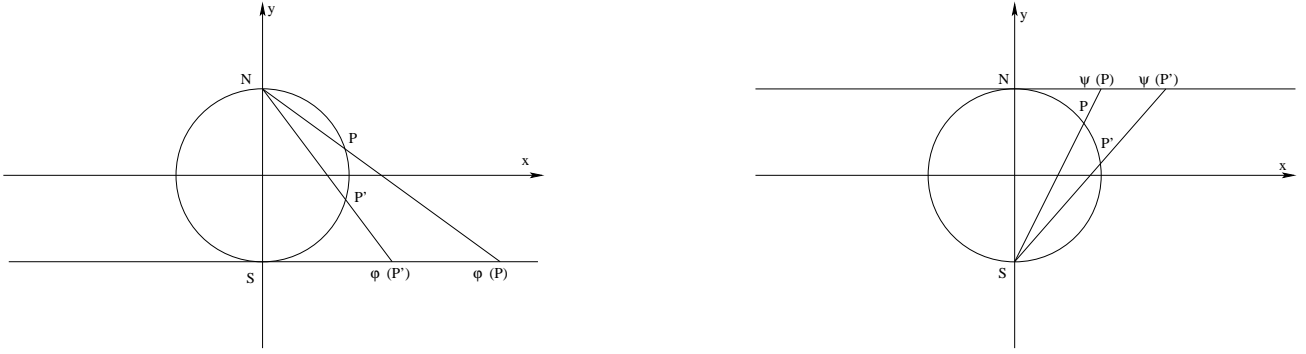


Figure 2.1: Proiezioni stereografiche

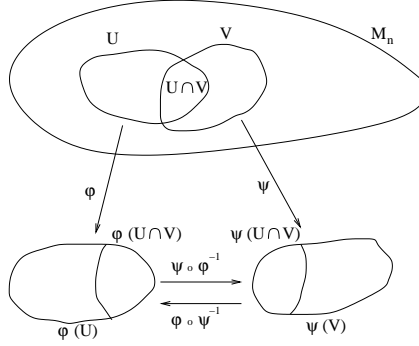


Figure 2.2: Trasformazioni di coordinate

Definizione 2.1.4 Se M_n é una varietà topologica, una famiglia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ di carte locali, tali che $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, si chiama **atlante** su X .

Ovviamente l'esistenza di un atlante é assicurata dal fatto che M_n é localmente euclideo. Nell'esempio 15, $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, i)\}$, dove i é l'applicazione identica, é un atlante. Mentre nell'esempio 16, un atlante é: $\mathcal{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi)\}$.

Una carta locale (U, φ) dá la possibilità di assegnare delle coordinate ad ogni punto del suo dominio. Infatti, l'omeomorfismo φ associa biunivocamente ad ogni punto $P \in U$ le coordinate del punto $\varphi(P) \in \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$. Quindi, assegnare un atlante su una varietà topologica significa assegnare sistemi di coordinate locali in M_n .

Peró i domini delle carte in generale non sono a due a due disgiunti (esempio 16), quindi, nell'intersezione tra due domini sono definiti due sistemi di coordinate distinti. Cosí, se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte di un atlante \mathcal{A} , tali che $U \cap V \neq \emptyset$, ai punti di $U \cap V$ sono assegnate da $\varphi : U \cap V \rightarrow \varphi(U \cap V)$, le coordinate (x^1, x^2, \dots, x^n) dei punti di $\varphi(U \cap V)$ e da $\psi : U \cap V \rightarrow \psi(U \cap V)$, le coordinate (y^1, y^2, \dots, y^n) dei punti di $\psi(U \cap V)$. Poiché sia φ che ψ sono invertibili, si possono considerare le due applicazioni che legano tra di loro i due sistemi di coordinate (fig 2.2):

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V) \quad (y^1, y^2, \dots, y^n) = \psi \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

e l'applicazione inversa:

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V) \quad (x^1, x^2, \dots, x^n) = \varphi \circ \psi^{-1}(y^1, y^2, \dots, y^n),$$

che per semplicitá di scrittura, nel seguito, verranno indicate con le notazioni usuali:

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \quad \text{e} \quad x^i = x^i(y^1, y^2, \dots, y^n), \quad (2.1)$$

dove il simbolo y^i nel secondo membro della prima, indica la funzione $p_i \circ \psi \circ \varphi^{-1}$, essendo $p_i(y^1, y^2, \dots, y^n) = y^i$, la proiezione sulla i -esima coordinata e analogamente x^i nel secondo membro della seconda, indica la funzione $p_i \circ \varphi \circ \psi^{-1}$.

Poiché le funzioni φ e ψ sono continue assieme alle loro inverse e la i -esima proiezione p_i é certamente continua, le funzioni (2.1) sono continue.

Nella fig. 2.3 sono calcolate le funzioni (2.1) nel caso dell'esempio 16. Preso un punto $P = (\alpha, \beta) \in U \cap V = S^1 - \{N, S\}$, proiettando P sulle tangenti a S ed a N , si ottengono le sue coordinate $x' = \frac{2\alpha R}{R-\beta}$ e $x'' = \frac{2\alpha R}{R+\beta}$, da cui eliminando α e β con l'aiuto dell'equazione $\alpha^2 + \beta^2 = R^2$, si ottiene $x'' = \frac{4R^2}{x'}$ e l'inversa $x' = \frac{4R^2}{x''}$. Le due funzioni ricavate sopra sono, in

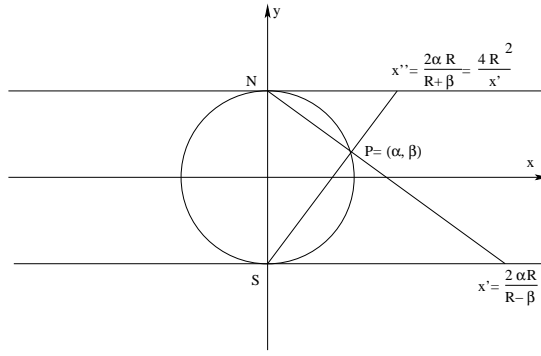


Figure 2.3: Trasformazioni di coordinate in S^1

$U \cap V$ dove $x' \neq 0$ e $x'' \neq 0$, non solo continue ma anche dotate di derivate di ordine qualunque. Nel caso della sfera S^n , si può vedere che le trasformazioni di coordinate in $S^n - \{N, S\}$ sono:

$$y^i = \frac{4R^2 x^i}{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2} \quad \text{e} \quad x^i = \frac{4R^2 y^i}{(y^1)^2 + (y^2)^2 + \dots + (y^n)^2}, \quad (2.2)$$

che sono, nel loro insieme di definizione, funzioni di classe C^∞ .

Definizione 2.1.5 Un atlante \mathcal{A} su una varietà topologica M_n si dice di classe C^k con $k \geq 0$, se per ogni coppia di carte locali (U, φ) e (V, ψ) in \mathcal{A} con $U \cap V \neq \emptyset$, le corrispondenti trasformazioni di coordinate (2.1), sono funzioni (reali) di classe C^k .

In base a questa definizione l'atlante dell'esempio 16 è di classe C^∞ .

Osservazione 3 Se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte di un atlante di classe C^k con $k > 0$ e $U \cap V \neq \emptyset$, denotate con (x^1, x^2, \dots, x^n) e (y^1, y^2, \dots, y^n) le coordinate che introducono rispettivamente in U e V , le trasformazioni di coordinate (2.1), essendo invertibili in $U \cap V$, ammettono determinanti jacobiani diversi da zero e di segno costante su ciascuna componente connessa di $U \cap V$ ed inoltre sono l'uno inverso dell'altro:

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{\partial y^j}{\partial x^h} = \delta_h^i \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^h} = \delta_h^i. \quad (2.3)$$

Dati due atlanti \mathcal{A} e \mathcal{B} di una varietà topologica M_n , con il simbolo $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, verrà indicato l'atlante le cui carte sono quelle di \mathcal{A} e quelle di \mathcal{B} .

Definizione 2.1.6 Due atlanti di classe C^k \mathcal{A} e \mathcal{B} di una varietà topologica M_n si dicono equivalenti quando $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ è di classe C^k .

Osservazione 4 Due atlanti di classe C^0 sono sempre equivalenti, infatti comunque si prendono due carte in M_n con domini non disgiunti, la trasformazione di coordinate (2.1) è, come osservato precedentemente, sempre continua, perché M_n è localmente euclideo.

In generale non è detto che due atlanti di classe C^k , con $k > 0$, siano equivalenti. Per esempio, se si considera la varietà topologica \mathbb{R} , i due atlanti di classe C^∞ $\{(\mathbb{R}, i)\}$ e $\{(\mathbb{R}, \varphi)\}$, dove $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $i(x) = x$ e $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = x^3$, non sono equivalenti. Infatti $i \circ \varphi^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ non è derivabile in $x = 0$.

Una varietà topologica, che certamente è dotata di atlanti di classe C^0 , potrebbe non essere dotata di atlanti di classe C^k con $k > 0$.

Da ora in poi, se non indicato diversamente, k verrà supposto positivo.

Proposizione 2.1.1 La relazione tra atlanti introdotta nella definizione 2.1.6 è una relazione di equivalenza.

Dimostrazione. Le proprietà riflessiva e simmetrica sono banali. Supponiamo che \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} siano tre atlanti di classe C^k tali che $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ siano di classe C^k , vogliamo dimostrare che anche $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ è di classe C^k . Siano (U, φ) e (V, ψ) due carte rispettivamente di \mathcal{A} e \mathcal{C} con $U \cap V \neq \emptyset$. Poiché i domini delle carte di \mathcal{B} ricoprono M_n , in particolare ricoprono $U \cap V$, quindi esiste una famiglia di carte $\{(W_i, \chi_i)\}_{i \in I}$ di \mathcal{B} tali che $U \cap V \subseteq \bigcup_{i \in I} W_i$, da cui si ottiene: $U \cap V = U \cap V \cap \bigcup_{i \in I} W_i = \bigcup_{i \in I} (U \cap V \cap W_i)$. La restrizione della funzione $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ a ciascun $\varphi(U \cap V \cap W_i)$ si può scrivere $\psi \circ \chi_i^{-1} \circ \chi_i \circ \varphi^{-1}$, che è la composizione delle funzioni $\chi_i \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V \cap W_i) \rightarrow \chi_i(U \cap V \cap W_i)$ e $\psi \circ \chi_i^{-1}: \chi_i(U \cap V \cap W_i) \rightarrow \psi(U \cap V \cap W_i)$, che sono di classe C^k perché \mathcal{A} è equivalente a \mathcal{B} e \mathcal{B} è equivalente a \mathcal{C} . Quindi $\varphi \circ \psi^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$, come composizione di funzioni di classe C^k , è di classe C^k su ogni aperto $\varphi^{-1}(U \cap V \cap W_i)$ e quindi su ogni $x \in \varphi^{-1}(U \cap V)$. •

Definizione 2.1.7 Si chiama **struttura differenziabile di classe C^k** su una varietà topologica M_n , una classe di equivalenza di atlanti di classe C^k .

Per quanto osservato prima, su una data varietà topologica, potrebbero non esistere strutture differenziabili di classe C^k e se esistono potrebbero non essere uniche.

Definizione 2.1.8 Una varietà topologica M_n con una struttura differenziabile σ di classe C^k , si chiama **varietà differenziabile di classe C^k** .

Varietà topologiche che non ammettono strutture differenziabili di classe C^k , non sono varietà differenziabili. Varietà topologiche che ammettono strutture differenziabili di classe C^k differenti, corrispondono a varietà differenziabili differenti, secondo la scelta della struttura differenziabile. Così, in base all'osservazione 4, \mathfrak{R} con la struttura differenziabile σ_1 determinata dall'atlante $\{(\mathfrak{R}, i)\}$ è una varietà differenziabile di classe C^∞ , distinta dalla varietà differenziabile di classe C^∞ , \mathfrak{R} con la struttura differenziabile σ_2 determinata dall'atlante $\{(\mathfrak{R}, \varphi)\}$.

Definizione 2.1.9 Se M_n è una varietà differenziabile di classe C^k , con struttura differenziabile σ , si chiama **atlante massimo**, l'unione di tutti gli atlanti di σ : $\mathcal{M}_\sigma = \bigcup_{A \in \sigma} A$.

Per come è stato definito, l'atlante massimo è un atlante di σ ed è il più grande degli atlanti di σ .

Definizione 2.1.10 Due carte (U, φ) , (V, ψ) di un atlante \mathcal{A} di classe C^k con $U \cap V \neq \emptyset$, si dicono **concordemente orientate o equiorientate**, quando le trasformazioni di coordinate (2.1) che determinano, hanno determinante jacobiano positivo.

Definizione 2.1.11 Un atlante \mathcal{A} di classe C^k si dice **orientato**, se comunque si prendono due carte (U, φ) e (V, ψ) di \mathcal{A} con $U \cap V \neq \emptyset$, esse sono equiorientate.

Definizione 2.1.12 Una varietà differenziabile M_n di classe C^k , si dice **orientabile** se, nella sua struttura differenziabile σ , esiste un atlante orientato.

Osservazione 5 Se consideriamo, l'esempio della sfera S^2 , le trasformazioni di coordinate (2.2) in $U \cap V = S^2 - \{N, S\}$ sono

$$y^1 = \frac{4R^2 x^1}{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \quad y^2 = \frac{4R^2 x^2}{(x^1)^2 + (x^2)^2}.$$

Il determinante jacobiani di questa trasformazione è:

$$\frac{\partial(y^1, y^2)}{\partial(x^1, x^2)} = -\frac{16R^4}{((x^1)^2 + (x^2)^2)^2} < 0.$$

Quindi l'atlante considerato in questo esempio non è orientato. Ciò non vuol dire che la sfera non è orientabile, infatti se si considera l'atlante ottenuto dal precedente invertendo un asse, il determinante jacobiano diventa positivo e, non essendoci altre carte, il nuovo atlante è orientato, quindi S^2 orientabile.

Proposizione 2.1.2 In una varietà orientabile un atlante a domini connessi che non è orientato, lo può diventare facendo delle inversioni elementari di orientamento, che si ottengono cambiando di segno una coordinata. (Senza dimostrazione).

In base alla proposizione precedente, per dimostrare che una varietà non è orientabile, basta determinare un atlante a domini connessi non orientato e che non può essere orientato con inversioni elementari di orientamento.

Esempio 17 Consideriamo nel piano \vec{x}, \vec{y} il rettangolo $A = \{0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$ e nel piano \vec{u}, \vec{v} il rettangolo $B = \{0 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 1\}$ (fig. 2.4). "Incolliamo"² la parte del rettangolo A in cui $2 \leq x \leq 3$ con la parte di rettangolo B in cui $0 \leq u \leq 1$, mediante le equazioni

$$u = x - 2, \quad v = y; \tag{2.4}$$

e la parte di rettangolo A in cui $0 \leq x \leq 1$ con la parte di rettangolo B in cui $2 \leq u \leq 3$, mediante le equazioni

$$u = x + 2, \quad v = 1 - y. \tag{2.5}$$

²tale operazione viene fatta rigorosamente prendendo lo spazio topologico quoziente.

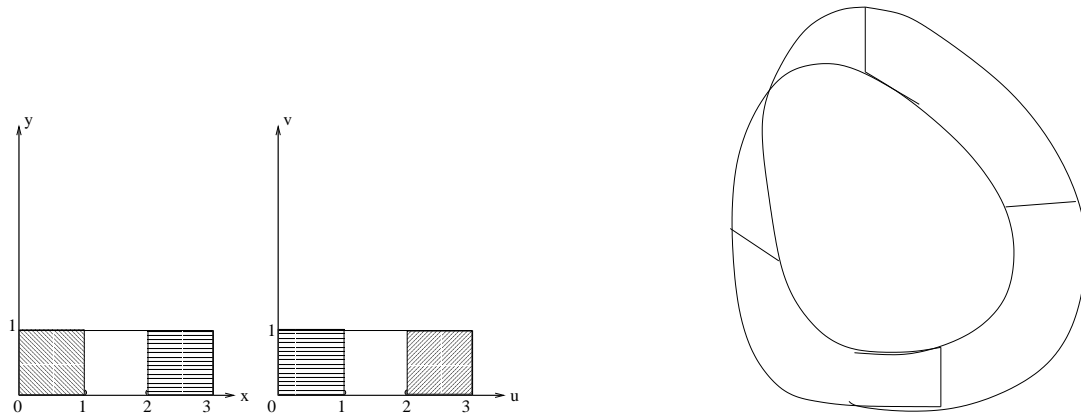


Figure 2.4: Nastro di Möbius

La varietà così ottenuta si chiama **nastro di Möbius**, un atlante è costituito dai due sistemi di coordinate (x, y) e (u, v) e le trasformazioni di coordinate sono date, nelle due componenti connesse definite sopra, dalle equazioni (2.4) e (2.5). Il determinante jacobiano della trasformazione (2.4) è:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

mentre quello della trasformazione (2.5) è

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Da questo, si vede che l'atlante considerato è a domini connessi, non è orientato e non si può trasformare, come nel caso della sfera, in un atlante orientato, con inversioni elementari di orientamento, infatti cambiando di segno una coordinata entrambi i determinanti jacobiani cambiano di segno, così uno negativo c'è sempre. Quindi il nastro di Möbius non è una varietà orientabile.

Nel seguito, una varietà differenziabile sarà tacitamente supposta connessa e orientabile.

2.2 Funzioni differenziabili

Definizione 2.2.1 Sia M_n una varietà differenziabile di dimensione n e classe C^k e V_m una varietà differenziabile di dimensione m e classe C^k . Una funzione $f : M_n \rightarrow V_m$ si dice **differenziabile** di classe C^h ($h \leq k$) in un punto $x \in M_n$ se esiste una carta (U, φ) nell'atlante massimo di M_n con $x \in U$ ed esiste una carta (V, ψ) nell'atlante massimo di V_m , con $f(x) \in V$ e $f(U) \subseteq V$,³ tale che la funzione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ è differenziabile di classe C^h in $\varphi(x)$. Se W è un aperto di M_n e f è differenziabile di classe C^h in ogni $x \in W$, allora si dice che f è differenziabile di classe C^h in W . Se f è differenziabile in M_n , si dice semplicemente che è differenziabile.

La definizione precedente riconduce il concetto di differenziabilità di una funzione tra varietà a quello tra funzioni reali. Infatti se denotiamo con (x^1, x^2, \dots, x^n) le coordinate definite in U dalla carta (U, φ) e con (y^1, y^2, \dots, y^m) , quelle definite in V dalla carta (V, ψ) , allora (fig. 2.5) $(y^1, y^2, \dots, y^m) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$, che è equivalente alle m funzioni reali

$$y^i = p_i \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.6)$$

dove al solito le funzioni $p_i(y^1, y^2, \dots, y^m) = y^i$ sono le proiezioni sulla i -esima coordinata e sono differenziabili di qualunque ordine. Essendo le funzioni (2.6) reali, si può decidere sulla loro differenziabilità usando i consueti metodi dell'analisi reale.

Poiché la scelta delle carte locali nella definizione precedente, in generale, non è univoca, ci si potrebbe chiedere se tale definizione è indipendente dalla scelta delle particolari carte. A tal proposito, supponiamo che $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia di classe C^h , che (U', φ') sia un'altra carta nell'atlante massimo di M_n tale che $x \in U'$ e (V', ψ') sia un'altra carta nell'atlante massimo di V_m tale che $f(x) \in V'$ e $f(U') \subseteq V'$. Allora, denotata con i l'applicazione identica, in $\varphi'(U \cap U')$ si ha:

$$\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1} = \psi' \circ i \circ f \circ i \circ \varphi'^{-1} = \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \varphi'^{-1} = (\psi' \circ \psi^{-1}) \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \varphi'^{-1}),$$

³tale condizione non è difficile da realizzare se si tiene conto che se (U, φ) è una carta dell'atlante massimo anche (U', φ) , dove U' è un qualunque sottoinsieme aperto di U , è una carta dell'atlante massimo.

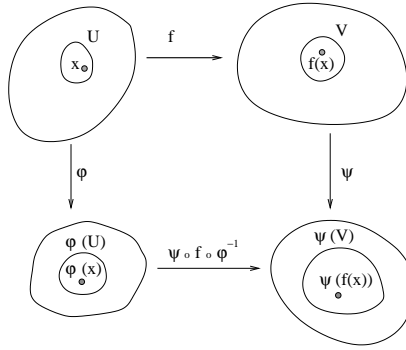


Figure 2.5: Rappresentazione locale di f

quindi la funzione $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ si può considerare come la funzione composta della funzione $\psi' \circ \psi^{-1}$ di classe C^k , perché V_m è di classe C^k , della funzione $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ di classe C^h per ipotesi e della funzione $\varphi \circ \varphi'^{-1}$ che è di classe C^k perché M_n è di classe C^k , essendo $h \leq k$, ne segue che $\psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$ è di classe C^h .

Proposizione 2.2.1 *Siano M_n, V_m e X_h varietà differenziabili di classe C^k e $f : M_n \rightarrow V_m, g : V_m \rightarrow X_h$ funzioni differenziabili di classe C^h ($h \leq k$) rispettivamente in $x \in M_n$ e $f(x)$, allora la funzione $g \circ f : M_n \rightarrow X_h$ è differenziabile di classe C^h in x .*

Dimostrazione. Se (U, φ) e (W, χ) sono rispettivamente due carte negli atlanti massimi di M_n e X_h con $x \in U, g(f(x)) \in W$ e $g(f(U)) \subseteq W$, allora $\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1} = \chi \circ (g \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f) \circ \varphi^{-1} = (\chi \circ g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})$, essendo (V, ψ) un'opportuna carta nell'atlante massimo di V_m . Così, $\chi \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$, si può considerare una funzione composta da due funzioni di classe C^h , perché per ipotesi f e g sono differenziabili di classe C^h , quindi è di classe C^h . •

Definizione 2.2.2 *Siano M_n e V_n due varietà differenziabili di classe C^k , una funzione $f : M_n \rightarrow V_n$ si dice che è un **diffeomorfismo** di classe C^h ($h \leq k$) se è un omeomorfismo e se le funzioni f e f^{-1} sono differenziabili di classe C^h .*

Definizione 2.2.3 *Due varietà differenziabili di classe C^k M_n e V_n si dicono **diffeomorfe**, se esiste un diffeomorfismo $f : M_n \rightarrow V_n$ di classe C^k*

2.3 Spazi vettoriali tangenti ad una varietà differenziabile

In questo paragrafo e nei due successivi, quanto fatto sugli spazi affini nella prima parte, si può ripetere immutato, con l'unica eccezione di sostituire l'espressione *sistema di coordinate* con *carta locale* e tenendo conto anche che, in generale, su una varietà differenziabile non è possibile definire sistemi di coordinate cartesiane globali, né ha senso introdurre i vettori come segmenti orientati, così come si faceva sugli spazi affini.

Pertanto, in questo e nei prossimi due paragrafi verranno richiamati i concetti già introdotti nella prima parte, evitando di ripetere dimostrazioni già fatte.

Nel seguito con il simbolo M_n si intenderà una varietà differenziabile di classe C^k con $k > 0$, una carta locale si intende appartenere all'atlante massimo della struttura differenziabile su M_n e verrà indicata con il simbolo $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ al fine di specificare le coordinate che essa introduce su U .

L'insieme delle funzioni differenziabili di classe C^h ($h \leq k$) su un aperto U di M_n ed a valori in \mathbb{R} , forma un'algebra con le consuete operazioni di somma e di prodotto di funzioni, che sarà indicata con il simbolo $\mathcal{F}^h(U)$. Se $P \in M_n$, l'insieme delle funzioni reali, differenziabili di classe C^h in un intorno aperto di P non è un'algebra perché non ha un unico zero, però la relazione che identifica due di tali funzioni se coincidono in un intorno aperto di P , è una relazione di equivalenza e l'insieme quoziente $\mathcal{F}^h(P)$ è un'algebra.

Definizione 2.3.1 *Una **curva differenziabile** di classe C^k su M_n è un'applicazione $\gamma : [a, b] \rightarrow M_n$, dove $[a, b]$ è un intervallo chiuso di \mathbb{R} , tale che, in ogni carta locale $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ che interseca il codominio di γ , le coordinate $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ di $\gamma(t)$ sono funzioni differenziabili di classe C^k e si chiamano **equazioni parametriche** di γ nella carta data.*

Definizione 2.3.2 *Sia $P \in M_n$ e $\gamma(t)$ una curva differenziabile di classe C^1 passante per P : $\gamma(t_0) = P$ per qualche $t_0 \in]a, b[$. Si chiama **vettore tangente** alla curva γ nel punto P , l'applicazione $X : \mathcal{F}^1(P) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$X(f) = \left. \frac{df(\gamma(t))}{dt} \right|_{t_0}.^4 \quad (2.7)$$

⁴X è la derivata di f nella direzione di γ , che, ovviamente esiste sempre, perché in qualunque carta locale, $f(\gamma(t)) = f(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ è la composizione di funzioni di classe C^1

L'insieme dei vettori tangenti in P si indica con T_P .

Definizione 2.3.3 Si chiama **derivazione** ogni applicazione $X : \mathcal{F}^1(P) \rightarrow \mathfrak{R}$ che gode delle seguenti proprietà:

1. linearità: $\forall \alpha, \beta \in \mathfrak{R} \quad \forall f, g \in \mathcal{F}^1(P), \quad X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g)$;
2. $X(fg) = X(f)g(P) + f(P)X(g)$.

L'insieme delle derivazioni si indica con D_P .

Proposizione 2.3.1 D_P è uno spazio vettoriale.

Dimostrazione. Fatta nella prima parte.

Proposizione 2.3.2 Ogni vettore tangente è una derivazione.

Dimostrazione. Fatta nella prima parte.

Dalle proposizioni precedenti segue che T_P è un sottinsieme dello spazio vettoriale D_P . Ma si può dimostrare di più.

Teorema 2.3.1 T_P è uno spazio vettoriale di dimensione n .

Dimostrazione. Fatta nella prima parte.

La dimostrazione segue il seguente schema: fissata una carta locale $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ con $P \in U$ e denotati con $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$ gli operatori di derivazione lungo le linee coordinate nel punto P , essi generano un sottospazio vettoriale T'_P di D_P di dimensione n , che coincide con T_P .

Definizione 2.3.4 La base $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$, si chiama **base naturale** associata alle coordinate (x^1, x^2, \dots, x^n) .

Siano $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$ due carte locali con $P \in U \cap V$ e con trasformazioni di coordinate (2.1). Le due carte locali definiscono due basi naturali $\frac{\partial}{\partial x^1}|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_P$ e $\frac{\partial}{\partial y^1}|_P, \frac{\partial}{\partial y^2}|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}|_P$ in T_P . Sia, ora, $f \in \mathcal{F}^1(P)$, allora per la (2.1)

$$f(y^1, y^2, \dots, y^n) = f(x^1(y^1, y^2, \dots, y^n), x^2(y^1, y^2, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, y^2, \dots, y^n))$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}|_P = \frac{\partial f}{\partial x^h}|_P \frac{\partial x^h}{\partial y^i}|_P$$

poichè questa equazione vale per ogni $f \in \mathcal{F}^1(P)$, allora

$$\frac{\partial}{\partial y^i}|_P = \frac{\partial x^h}{\partial y^i}|_P \frac{\partial}{\partial x^h}|_P. \quad (2.8)$$

L'equazione inversa si ottiene utilizzando la matrice inversa:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}|_P = \frac{\partial y^h}{\partial x^i}|_P \frac{\partial}{\partial y^h}|_P. \quad (2.9)$$

Ovviamente, le componenti rispetto alle due basi sono legate tra di loro dalla legge di cotrovarianza.

Definizione 2.3.5 Lo spazio vettoriale T_P si chiama **spazio vettoriale tangente** a M_n in P .

2.4 Tensori nello spazio tangente

Nel seguito, il simbolo T_P^* indicherà lo spazio duale di T_P .

Definizione 2.4.1 Sia $f \in \mathcal{F}^1(P)$, si chiama **differenziale** di f nel punto P , l'applicazione $df|_P : T_P \rightarrow \mathfrak{R}$ definita da

$$\forall X \in T_P \quad df|_P(X) = X(f). \quad (2.10)$$

Proposizione 2.4.1 $\forall f \in \mathcal{F}^1(P) \quad df \in T_P^*$.

Dimostrazione. Fatta nella prima parte.

Sia $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$, una carta locale con $P \in U$, se si denota con x^i la funzione $f(x^1, x^2, \dots, x^n) = x^i$, si ha:

$$\forall X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_P \in T_P \quad dx^i |_P(X) = X(x^i) = X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} |_P = X^j \delta^i_j = X^i,$$

quindi, dalla definizione di base duale segue che i differenziali $dx^1 |_P, dx^2 |_P, \dots, dx^n |_P$ sono la base duale della base naturale $\frac{\partial}{\partial x^1} |_P, \frac{\partial}{\partial x^2} |_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_P$.

In particolare

$$\forall X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_P \in T_P \quad df |_P(X) = X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} |_P = \frac{\partial f}{\partial x^i} |_P dx^i |_P(X),$$

quindi

$$df |_P = \frac{\partial f}{\partial x^i} |_P dx^i |_P. \quad (2.11)$$

Sia ora $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$ un'altra carta locale con $P \in V$, allora, tenendo conto delle (2.1) in $U \cap V$, per la (2.11), si ha:

$$dy^i |_P = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} |_P dx^j |_P, \quad (2.12)$$

che confrontata con la (2.8) dá una legge di trasformazione consistente con le leggi di trasformazione delle forme lineari. Analogamente l'inversa della (2.12) è:

$$dx^i |_P = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} |_P dy^j |_P. \quad (2.13)$$

Essendo T_P uno spazio vettoriale di dimensione n , su di esso si può costruire tutta l'algebra tensoriale sviluppata nel capitolo precedente, l'unica differenza è che in T_P ci sono delle basi, le basi naturali, legate alle carte locali, che vengono indicate con una notazione diversa. Così, per esempio, se $T \in T_P \otimes T_P^* \otimes T_P^*$, in una base naturale associata ad una carta locale $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ con $P \in U$, si scrive:

$$T = T^i_{jh} \frac{\partial}{\partial x^i} |_P \otimes dx^j |_P \otimes dx^h |_P.$$

Se, ora, $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$ è un'altra carta locale con $P \in V$, allora

$$T = T'^i_{jh} \frac{\partial}{\partial y^i} |_P \otimes dy^j |_P \otimes dy^h |_P,$$

dove

$$T'^i_{jh} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} |_P \frac{\partial x^p}{\partial y^j} |_P \frac{\partial x^q}{\partial y^h} |_P T^k_{pq} \quad \text{e} \quad T^i_{jh} = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} |_P \frac{\partial y^p}{\partial x^j} |_P \frac{\partial y^q}{\partial x^h} |_P T'^k_{pq}.$$

2.5 Campi di tensori

Definizione 2.5.1 Si chiama **campo vettoriale** in un aperto W di M_n , un' applicazione X che per ogni $P \in W$ associa un vettore $X(P) \in T_P$.

Sia X un campo vettoriale su un aperto W e $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ una carta locale tale che $W \cap U \neq \emptyset$. Allora per ogni $P \in W \cap U$, si ha:

$$X(P) = X^i(P) \frac{\partial}{\partial x^i} |_P.$$

Da ora in poi, i simboli $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ indicheranno la base naturale calcolata nel generico punto in cui le coordinate che la determinano sono definite. Con questa notazione, l'equazione precedente si può scrivere:

$$X(x^1, x^2, \dots, x^n) = X^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.14)$$

intendendo che il punto in cui deve essere calcolato $\frac{\partial}{\partial x^i}$, è quello dell'argomento di X^i .

Sia $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$ un'altra carta locale tale che $W' = U \cap V \cap W \neq \emptyset$, allora in W' vale la (2.14) ma vale anche:

$$X(y^1, y^2, \dots, y^n) = X'^i(y^1, y^2, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial y^i},$$

con, su tutto W' :

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^h}{\partial y^i}(y^1, y^2, \dots, y^n) \frac{\partial}{\partial x^h} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^h}{\partial x^i}(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial y^h}$$

e quindi:

$$X^{i_1} (y^1(x^1, x^2, \dots, x^n), y^2(x^1, x^2, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, x^2, \dots, x^n)) = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{h_1}}(x^1, x^2, \dots, x^n) X^{h_1}(x^1, x^2, \dots, x^n)$$

e

$$X^i(x^1(y^1, y^2, \dots, y^n), x^2(y^1, y^2, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, y^2, \dots, y^n)) = \frac{\partial x^i}{\partial y^{h_1}}(y^1, y^2, \dots, y^n) X^{h_1}(y^1, y^2, \dots, y^n).$$

Da ora in poi, per motivi di semplicità, dove non è possibile fare confusione, gli argomenti delle funzioni non saranno specificati. Così le equazioni precedenti si scrivono:

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^{i_1} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial y^{i_1}} = \frac{\partial x^{h_1}}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial}{\partial x^{h_1}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^{h_1}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^{h_1}} \quad (2.16)$$

$$X^{i_1} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{h_1}} X^{h_1} \quad \text{e} \quad X^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^{h_1}} X^{h_1}. \quad (2.17)$$

Definizione 2.5.2 Si chiama **campo tensoriale** r -volte controvariante ed s -volte covariante in un aperto W di M_n , un' applicazione T che per ogni $P \in W$ associa un tensore $T(P) \in \underbrace{T_P \otimes \dots \otimes T_P}_{r\text{-volte}} \otimes \underbrace{T_P^* \otimes \dots \otimes T_P^*}_{s\text{-volte}}$.

Introdotte due carte locali $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$, tali che $W' = U \cap V \cap W \neq \emptyset$, utilizzando le convenzioni introdotte sopra e omettendo $|_P$ anche nella base duale, in W' si ha:

$$T = T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} = T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{i_r}} \otimes dy^{j_1} \otimes \dots \otimes dy^{j_s} \quad (2.18)$$

$$T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} = \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{h_1}} \cdots \frac{\partial y^{i_r}}{\partial x^{h_r}} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_s}}{\partial y^{j_s}} T^{h_1, \dots, h_r}_{k_1, \dots, k_s} \quad (2.19)$$

e

$$T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial y^{h_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial y^{h_r}} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_s}}{\partial x^{j_s}} T^{h_1, \dots, h_r}_{k_1, \dots, k_s}. \quad (2.20)$$

Definizione 2.5.3 Sia W un aperto di M_n e $h < k$, un campo tensoriale T si dice **differenziabile** di classe C^h su W , se le sue componenti in ogni carta locale sono funzioni differenziabili di classe C^h .

Le equazioni (2.19) e (2.20), mostrano che se la differenziabilità delle componenti di T è verificata in una carta locale di dominio U , è pure verificata in $U \cap V$, essendo V il dominio di un'altra carta locale che interseca U .

Nel seguito se non è diversamente specificato, si intende che un campo tensoriale è di classe C^h con $h < k$.

2.6 Connessioni lineari

Negli spazi affini è stata chiamata derivata covariante di un campo di vettori, quel campo di tensori una volta covariante ed una volta controvariante, le cui componenti, in coordinate cartesiane, coincidono con le derivate ordinarie del campo di vettori dato. Ovviamente non è possibile dare tale definizione su una varietà differenziabile, in quanto, in generale, su essa non esistono sistemi di coordinate rettilinei. Quindi se si vuole generalizzare il concetto di derivata covariante ad una varietà qualunque, bisogna definirla partendo dai requisiti minimi che essa deve avere.

Nel seguito una varietà differenziabile verrà supposta di classe C^k con $k > 2$ ed ogni campo di tensori di classe C^h con $h > 1$.

2.6.1 Derivata covariante di un vettore

Definizione 2.6.1 Una **connessione lineare** su una varietà differenziabile M_n è un'applicazione ∇ che ad ogni campo di vettori X su un aperto W , associa un campo di tensori una volta covariante ed una volta controvariante ∇X di classe C^{h-1} definito su W detto **derivata covariante di X** , tale che le seguenti proprietà siano verificate:

1. $\nabla(X + Y) = \nabla X + \nabla Y$, essendo X e Y campi di vettori definibili sullo stesso aperto;

2. $\nabla(fX) = df \otimes X + f\nabla X$, essendo f e X rispettivamente una funzione reale ed un campo di vettori definibili sullo stesso aperto (regola di Liebnitz).

Sia X un campo di vettori definito in un aperto W di M_n e scegliamo per ogni $P \in W$ una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ nello spazio tangente T_P (campo di basi).⁵ Poiché $\nabla \mathbf{e}_i$ é un tensore doppio una volta covariante ed una volta controvariante, ne segue che

$$\nabla \mathbf{e}_i = \gamma^j_{hi} e^h \otimes \mathbf{e}_j, \quad (2.21)$$

dove γ^j_{hi} sono delle funzioni di P , che dipendono, fissata la base, dalla particolare connessione scelta.

Sia $X = X^i \mathbf{e}_i$ un campo di vettori, per la definizione 2.6.1 e per la definizione di differenziale di una funzione: $dX^i(V) = V(X^i) = V^h e_h(X^i) = \mathbf{e}_h(X^i) e^h(V)$, ne segue che:

$$\nabla X = \nabla(X^i \mathbf{e}_i) = d(X^i) \otimes \mathbf{e}_i + X^i \nabla \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_h(X^i) e^h \otimes \mathbf{e}_i + X^i \gamma^k_{hi} e^h \otimes \mathbf{e}_k = (\mathbf{e}_h(X^i) + X^i \gamma^k_{hi}) e^h \otimes \mathbf{e}_k,$$

quindi, denotate con $\nabla_h X^k$ o equivalentemente con $X^k_{;h}$ le componenti del tensore ∇X , si ha:

$$\nabla_h X^k = X^k_{;h} = \mathbf{e}_h(X^k) + \gamma^k_{hi} X^i. \quad (2.22)$$

Cosí la conoscenza delle funzioni γ^i_{jh} in corrispondenza di ogni campo di basi, caratterizza completamente la connessione, nel senso che, utilizzando la (2.22), si può calcolare la derivata covariante di ciascun campo di vettori. Per questo motivo tali funzioni si chiamano **coefficienti della connessione**. In particolare, se viene scelta una base naturale: $\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ i coefficienti della connessione verranno indicati con il simbolo Γ^i_{jh} e la (2.22) diventa

$$\nabla_h X^k = X^k_{;h} = \partial_h(X^k) + \Gamma^k_{hi} X^i, \quad (2.23)$$

dove, al solito $\partial_h = \frac{\partial}{\partial x^h}$. L'equazione (2.23) é identica all'espressione della derivata covariante trovata negli spazi affini e come negli spazi affini si può dimostrare che i coefficienti della connessione non sono le componenti di un tensore. Per far questo consideriamo due carte locali $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ e $(V, \psi, y^1, y^2, \dots, y^n)$ con $U \cap V \neq \emptyset$, allora in $U \cap V$ la (2.21) si scrive

$$\nabla \frac{\partial}{\partial x^i} = \Gamma^j_{hi} dx^h \otimes \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{e} \quad \nabla \frac{\partial}{\partial y^i} = \Gamma'^j_{hi} dy^h \otimes \frac{\partial}{\partial y^j},$$

confrontando la seconda con la seguente:

$$\begin{aligned} \nabla \frac{\partial}{\partial y^i} &= \nabla \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = d \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \nabla \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^h \partial y^i} dy^h \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Gamma^s_{rk} dx^r \otimes \frac{\partial}{\partial x^s} = \\ &= \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^h \partial y^i} dy^h \otimes \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) + \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Gamma^s_{rk} \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^h} dy^h \right) \otimes \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^s} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial y^h \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \Gamma^s_{rk} \frac{\partial x^r}{\partial y^h} \frac{\partial y^j}{\partial x^s} \right) dy^h \otimes \frac{\partial}{\partial y^j} \end{aligned}$$

si ricava

$$\Gamma'^j_{hi} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^h \partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} + \Gamma^s_{rk} \frac{\partial y^j}{\partial x^s} \frac{\partial x^r}{\partial y^h} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}, \quad (2.24)$$

da cui si vede che a causa del primo addendo, la legge di trasformazione non é quella dei campi tensoriali.

Definizione 2.6.2 Siano X e Y due campi di vettori definiti in un aperto W di M_n , si chiama **derivata covariante di X nella direzione di Y** e si indica con il simbolo $\nabla_Y X$ il prodotto tensoriale contratto tra Y e ∇X .

Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é un campo di basi in W , si ha:

$$\nabla_Y X = Y^i \nabla_i X^j \mathbf{e}_j = Y^i X^j_{;i} \mathbf{e}_j = (Y^i \partial_i X^j + \gamma^j_{ih} Y^i X^h) \mathbf{e}_j.$$

Proposizione 2.6.1 Siano X e Y due campi di vettori definiti in un aperto W di M_n , per ogni campo di 1-forme ω , si ha:

$$\nabla_Y X(\omega) = \nabla X(Y, \omega). \quad (2.25)$$

Se $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ é un campo di basi in W , si ha:

$$\nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_i = \gamma^j_{hi} \mathbf{e}_j. \quad (2.26)$$

Dimostrazione.

$$\nabla X(Y, \omega) = \nabla_h X^j e^h \otimes \mathbf{e}_j(Y, \omega) = \nabla_h X^j Y^h \mathbf{e}_j(\omega) = \nabla_Y X(\omega).$$

In particolare

$$\nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_i(\omega) = \nabla \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_k, \omega) = \gamma^j_{hi} e^h \otimes \mathbf{e}_j(\mathbf{e}_k, \omega) = \gamma^j_{hi} \delta^h_k \mathbf{e}_j(\omega) = \gamma^j_{ki} \mathbf{e}_j(\omega). \quad \bullet$$

⁵tale base, cosí come tutto quello che verrà calcolato nel seguito, dipenderá dal particolare punto scelto, anche se la dipendenza non é espressa esplicitamente.

2.6.2 Trasporto parallelo, geodetiche

Nel seguito una curva verrà sempre supposta di classe C^h con $h > 1$.

Definizione 2.6.3 Sia $\gamma(t)$ una curva, $Y(t) = \frac{\partial}{\partial t}$ il campo di vettori tangenti alla curva e X é un campo di vettori definito in un aperto W che interseca $\gamma(t)$, si chiama **derivata covariante di X lungo γ** e si indica con $\frac{DX}{dt}$, la derivata covariante di X nella direzione di Y .

Precisamente in una carta locale $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$ il cui dominio interseca $W \cap \gamma(t)$:

$$\frac{DX^i}{dt} = \frac{dx^j}{dt} \nabla_j X^i = \frac{dx^j}{dt} \partial_j X^i + \Gamma^i_{jh} X^h \frac{dx^j}{dt} = \frac{dX^i}{dt} + \Gamma^i_{jh} X^h \frac{dx^j}{dt}.^6$$

Definizione 2.6.4 Un campo vettoriale X definito in un aperto W , si dice che é **trasportato parallelamente lungo una curva $\gamma(t)$** di classe C^h ($h < k$) che interseca W , se in $W \cap \gamma$, $\frac{DX}{dt} = 0$.

La definizione precedente ci consente di *connettere* tra di loro spazi tangenti in punti diversi.⁷ Infatti l'equazione che definisce il trasporto parallelo:

$$\frac{dX^j}{dt} + \Gamma^j_{jh} \frac{dx^j}{dt} X^h = 0, \quad (2.27)$$

é un'equazione differenziale del primo ordine ed in forma normale, nelle funzioni incognite $X^i(t)$, perché la curva γ é assegnata e quindi le funzioni $\frac{dx^j}{dt}$ sono funzioni note di t , la connessione é pure assegnata quindi le $\Gamma^i_{jh}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ sono funzioni note, che composte con le equazioni parametriche della curva, danno funzioni note di t . Nelle ipotesi di differenziabilità in cui ci siamo messi, vale il teorema di Cauchy, quindi se $P \in M_n$ e $X_0 \in T_P$ esiste una ed una sola soluzione $X(t)$ con $t_0 \leq t < t_0 + \delta$ della (2.27), verificante la condizione iniziale $X(t_0) = X_0$. Quindi preso un qualunque $\bar{t} \in]t_0, t_0 + \delta[$ e posto $Q = \gamma(\bar{t})$, il vettore $X(\bar{t}) \in T_Q$ é il trasportato parallelo di X_0 lungo la curva γ . Chiaramente tale nozione di trasporto parallelo é molto piú debole di quella che si ha in uno spazio affine, in quanto essa puó aver luogo solo localmente ed é dipendente dalla particolare curva scelta: se si cambia curva congiungente P e Q , cambia anche l'equazione (2.27), quindi il trasportato parallelo di $X_0 \in T_P$ non é, in generale, lo stesso vettore di T_Q (fig. 2.6).

In particolare, in uno spazio affine riferito a coordinate cartesiane, i coefficienti della connessione sono tutti nulli e l'equazione (2.27) ammette solo soluzioni costanti, come ci si doveva aspettare.

Il nome *connessione*, deriva, dunque, dal fatto che essa permette di collegare spazi tangenti in punti diversi.

Il concetto di trasporto parallelo, consente di generalizzare il concetto di linea retta su una generica varietà differenziabile. Per fare questo, osserviamo che, in uno spazio affine, le rette sono le sole curve che godono della proprietà che il proprio vettore tangente é trasportato parallelamente su di essa: presa una qualunque linea ed un vettore tangente in un suo punto P , se applichiamo in tutti gli altri punti, il segmento orientato avente la stessa direzione, modulo e verso, tale segmento orientato non sarà tangente alla linea tranne nel caso in cui essa é una retta.

Definizione 2.6.5 Una curva $\gamma(t)$ si chiama **geodetica** se il suo vettore tangente $Y = \frac{\partial}{\partial t}$ é trasportato parallelamente lungo essa: $\nabla_Y Y = 0 \iff Y^i \nabla_i Y^j = 0$.

Quindi l'**equazione delle geodetiche** é la (2.27) con $X^i(t) = \frac{dx^i}{dt}(t)$:

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jh} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt} = 0. \quad (2.28)$$

L'equazione (2.28) é un'equazione differenziale del secondo ordine in forma normale, le cui funzioni incognite sono le equazioni parametriche della curva, quindi, per il teorema di Cauchy, se $P = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in M_n$ e $X_0 = X_0^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_P$, esiste una ed una sola soluzione $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ della (2.28) per $t_0 \leq t < t_0 + \delta$, tale che $x^i(t_0) = x_0^i$ e $X^i(t_0) = X_0^i$. In altri termini, fissato un punto $P \in M_n$ e un vettore $X_0 \in T_P$, esiste una ed una sola geodetica uscente da P e tangente in P a X_0 .

É immediato constatare che se la varietà differenziabile é \mathfrak{R}^n e le coordinate sono cartesiane, allora i coefficienti della connessione sono identicamente nulli e il sistema (2.28) si riduce a $\frac{d^2 x^j}{dt^2} = 0$, che ammette come soluzioni le equazioni parametriche di una retta in coordinate cartesiane.

⁶tale definizione ha senso pur non essendo Y definito in un aperto, infatti nel calcolo di $\frac{DX}{dt}$ non ci sono derivate parziali di Y . Ovviamente la stessa cosa non puó dirsi per X .

⁷cosa che é ovviamente possibile in uno spazio affine, infatti, fissato un vettore nello spazio tangente ad un punto, basta prendere in un altro spazio tangente quel vettore che ha la stessa direzione, lo stesso modulo e lo stesso verso.

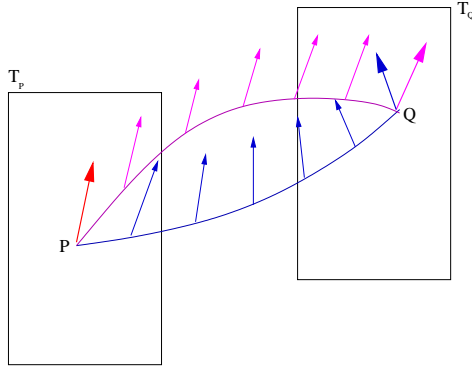


Figure 2.6: Trasporto parallelo di un vettore lungo due curve distinte

Osservazione 6 L'equazione (2.28) determina anche il parametro. Infatti se $\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ é una soluzione dell'equazione (2.28) e consideriamo il cambiamento di parametro $t = t(\tau)$, essendo quest'ultima funzione di classe C^h ed a derivata prima non nulla, allora $\frac{dx^i}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dx^i}{d\tau}$ e $\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{d^2\tau}{dt^2} \frac{dx^i}{d\tau} + \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \frac{d^2x^i}{d\tau^2}$, quindi $\gamma(t(\tau))$ é soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jh} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^h}{d\tau} = \lambda(\tau) \frac{dx^i}{d\tau} \quad \text{con} \quad \lambda(\tau) = -\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2t}{d\tau^2}(t(\tau)), \quad (2.29)$$

dove

$$\lambda(\tau) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(\tau) = \alpha\tau + \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{R}. \quad (2.30)$$

Quindi l'equazione delle geodetiche piú generale é la (2.29), scritta anche $\nabla_Y Y = \lambda Y$ con $Y = \frac{\partial}{\partial t}$, la (2.28), fornisce l'equazione delle geodetiche rispetto ad un parametro particolare che si chiama **parametro affine** e dalla (2.30) si vede che, determinato un parametro affine, tutti gli altri si ottengono da questo con una trasformazione lineare.

Nel seguito, se non espressamente specificato, il parametro verrà considerato affine e quindi verrà assunta la (2.28) come equazione delle geodetiche.

2.6.3 Coordinate normali geodetiche

Sia $P_0 \in M_n$, ed $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ una base di T_{P_0} . Possiamo identificare i vettori di T_{P_0} con \mathfrak{R}^n facendo corrispondere ad ogni vettore $\mathbf{v} = a^i \mathbf{e}_i \in T_{P_0}$ il punto $(a^1, a^2, \dots, a^n) \in \mathfrak{R}^n$. Tale corrispondenza é, ovviamente, biunivoca e con la topologia indotta da essa⁸, diventa un omeomorfismo.

Sia, ora, $\mathbf{w} = a^i \mathbf{e}_i \in T_{P_0}$, per quanto visto nel paragrafo precedente, esiste una ed una sola geodetica $\gamma_{\mathbf{w}}(t)$ tale che $\gamma_{\mathbf{w}}(0) = P_0$ ed il cui vettore tangente per $t = 0$ coincide con \mathbf{w} . Denotiamo con $\exp(\mathbf{w})$ il punto $P = \gamma_{\mathbf{w}}(1)$. In generale tale punto potrebbe non esistere, però si può dimostrare che in un intorno aperto sufficientemente piccolo U' di P_0 in T_{P_0} , tale corrispondenza, non solo esiste, ma é anche invertibile e continua con la sua inversa. Per cui l'intorno aperto $U = \exp[U'] \subseteq M_n$ di P_0 , può essere considerato il dominio di una carta locale il cui omeomorfismo é dato dalla composizione tra \exp^{-1} e l'omeomorfismo tra T_{P_0} e \mathfrak{R}^n . Tale carta locale definisce un sistema di coordinate in U che si chiamano **coordinate normali geodetiche** e che associano ad ogni $P = \exp(\mathbf{w}) \in U$ le componenti di \mathbf{w} .

Proposizione 2.6.2 Se (x^1, x^2, \dots, x^n) é un sistema di coordinate normali geodetiche centrate in P_0 , allora l'equazione della generica geodetica uscente da P_0 é del tipo $x^i(t) = a^i t$, con $a^i \in \mathfrak{R}$, cioè ha la stessa forma delle equazioni parametriche delle rette uscenti dall'origine in \mathfrak{R}^n .

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w} = a^i \mathbf{e}_i \in T_{P_0}$, $\gamma_{\mathbf{w}}(\tau)$ la geodetica che per $\tau = 0$ é tangente a \mathbf{w} , t un altro parametro affine tale che $\tau = \lambda t$ con $\lambda \in \mathfrak{R}$ e sia $\mathbf{u} \in T_{P_0}$ tale che $\gamma_{\mathbf{w}}(\tau) = \gamma_{\mathbf{u}}(t)$, allora $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{w}$. Infatti, $\frac{dx^i}{d\tau}(\tau) = \frac{dt}{d\tau}(\tau) \frac{dx^i}{dt}(t) = \frac{1}{\lambda} \frac{dx^i}{dt}(t)$, quindi per $\tau = t = 0$ si ricava $\mathbf{w} = \frac{1}{\lambda} \mathbf{u}$. Dall'eguaglianza appena dimostrata si ottiene: $\gamma_{\mathbf{w}}(\lambda t) = \gamma_{\lambda \mathbf{w}}(t)$, da cui per $t = 1$, $\gamma_{\mathbf{w}}(\lambda) = \gamma_{\lambda \mathbf{w}}(1) = \exp(\lambda \mathbf{w}) = (a^1 \lambda, a^2 \lambda, \dots, a^n \lambda)$, da cui, tenendo conto che il primo membro, al variare di λ descrive la geodetica uscente da \mathbf{w} , si ottiene la tesi. •

Proposizione 2.6.3 In un sistema di coordinate normali geodetiche centrate in P_0 , $\Gamma^h_{ij}(P_0) = 0$.

Dimostrazione. Poiché, per la proposizione precedente, l'equazione della generica geodetica uscente da P_0 é $x^i(t) = a^i t$, allora $\frac{dx^i}{dt}(t) = a^i$ e $\frac{d^2x^i}{dt^2}(t) = 0$, quindi l'equazione (2.28) diventa $\Gamma^h_{ij}(a^1 t, a^2 t, \dots, a^n t) a^i a^j = 0$ ed in particolare, per $t = 0$, $\Gamma^h_{ij}(P_0) a^i a^j = 0$. Poiché quest'ultima equazione deve valere per ogni geodetica e quindi per ogni n -pla (a^1, a^2, \dots, a^n) , ne segue che $\Gamma^h_{ij}(P_0) = 0$. •

⁸ $A \subseteq T_{P_0}$ é aperto se e solo se il suo corrispondente é aperto in \mathfrak{R}^n .

2.6.4 Derivata covariante di un tensore

La nozione di derivata covariante può essere estesa ad un tensore di rango qualunque, imponendo che verifichi le condizioni della definizione seguente.

Definizione 2.6.6 Per ogni campo di vettori Y , ∇_Y associa ad ogni campo di tensori T r -volte controvariante e s -volte covariante un campo di tensori $\nabla_Y T$, r -volte e s -volte covariante, che, nel caso in cui T è un vettore, si riduce a quanto visto nei paragrafi precedenti, e che verifica le seguenti condizioni

1. $\nabla_Y f = Y(f)$, per ogni funzione reale di classe C^h (tensore di rango 0);
2. $\nabla_Y(T + T') = \nabla_Y T + \nabla_Y T'$ essendo T e T' campi di tensori dello stesso rango, definibili sullo stesso aperto;
3. $\nabla_Y(T \otimes S) = \nabla_Y T \otimes S + T \otimes \nabla_Y S$ essendo T e S due campi di tensori definibili nello stesso aperto (regola di Liebnitz);
4. ∇_Y commuta con l'operazione di contrazione degli indici.

Definita la derivata covariante nella direzione di Y , si definisce la derivata covariante, coerentemente alla 2.25, utilizzando la seguente

$$\nabla T(Y, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, Y_1, Y_2, \dots, Y_s) = \nabla_Y T(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r, Y_1, Y_2, \dots, Y_s) \quad (2.31)$$

Volendo calcolare la derivata covariante di un campo di 1-forme nella direzione di un campo di vettori Y , fissata una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, poniamo

$$\nabla_{\mathbf{e}_h} e^i = \sigma^i_{hj} e^j, \quad (2.32)$$

dove σ^i_{jh} sono funzioni da determinare utilizzando le condizioni della definizione 2.6.6. Denotata con C l'operazione di contrazione degli indici e ricordando che essa consiste nel saturare un indice di covarianza con uno di controvarianza di un dato tensore, facendo scendere di due il rango del tensore, si trova:

$$C(e^i \otimes \mathbf{e}_j) = C(\delta^i_h \delta^k_j e^h \otimes \mathbf{e}_k) = \delta^i_h \delta^h_j = \delta^i_j, \quad (2.33)$$

da cui, per la prima della definizione 2.6.6

$$\nabla_{\mathbf{e}_h}(C(e^i \otimes \mathbf{e}_j)) = \nabla_{\mathbf{e}_h} \delta^i_j = \mathbf{e}_h(\delta^i_j) = 0. \quad (2.34)$$

Dalle equazioni (2.26), (2.32), (2.34) e dalle proprietà della definizione (2.6.6), si ricava

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\mathbf{e}_h}(C(e^i \otimes \mathbf{e}_j)) = C(\nabla_{\mathbf{e}_h}(e^i \otimes \mathbf{e}_j)) = C(\nabla_{\mathbf{e}_h} e^i \otimes \mathbf{e}_j + e^i \otimes \nabla_{\mathbf{e}_h} \mathbf{e}_j) = \\ &C(\sigma^i_{hk} e^k \otimes \mathbf{e}_j + \gamma^k_{hj} e^i \otimes \mathbf{e}_k) = \sigma^i_{hk} \delta^k_j + \gamma^k_{hj} \delta^i_k = \sigma^i_{hj} + \gamma^i_{hj}, \end{aligned}$$

quindi la (2.32) diventa

$$\nabla_{\mathbf{e}_h} e^i = -\gamma^i_{hj} e^j, \quad (2.35)$$

da cui, tenendo conto della linearità nella variabile Y implicata dall'equazione (2.31), si ottiene

$$\nabla_Y e^i = -Y^h \gamma^i_{hj} e^j \quad (2.36)$$

In particolare, se si pone $\nabla e^i = \lambda^i_{hj} e^h \otimes e^j$, dalla (2.31) e dalla (2.35) si ricava

$$\lambda^i_{rk} = \lambda^i_{hj} \delta_r^h \delta_k^j = \lambda^i_{hj} e^h \otimes e^j(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_k) = \nabla e^i(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_k) = \nabla_{\mathbf{e}_r} e^i(\mathbf{e}_k) = \gamma^i_{rj} e^j(\mathbf{e}_k) = \gamma^i_{rk},$$

da cui

$$\nabla e^i = -\gamma^i_{hj} e^h \otimes e^j \quad (2.37)$$

Grazie alla (2.36) ed alle proprietà della definizione 2.6.6, si può ricavare l'espressione della derivata covariante di un campo di 1-forme $\phi = \phi_i e^i$ nella direzione di Y :

$$\nabla_Y \phi = \nabla_Y(\phi_i e^i) = Y(\phi_i) e^i + \phi_i \nabla_Y e^i = Y^h \mathbf{e}_h(\phi_i) e^i - \phi_i Y^h \gamma^i_{hk} e^k = Y^h (\mathbf{e}_h(\phi_k) - \phi_i \gamma^i_{hk}) e^k. \quad (2.38)$$

Da cui

$$\nabla_Y \phi_k = Y^h \nabla_h \phi_k = Y^h (\mathbf{e}_h(\phi_k) - \phi_i \gamma^i_{hk}). \quad (2.39)$$

Dalla (2.38) si ricava

$$\nabla_Y \phi(X) = Y^h (\mathbf{e}_h(\phi_k) - \phi_i \gamma^i_{hk}) e^k(X) = (\mathbf{e}_h(\phi_k) - \phi_i \gamma^i_{hk}) e^k \otimes e^h(Y, X),$$

e dalla (2.31)

$$\nabla\phi = (\mathbf{e}_h(\phi_k) - \phi_i\gamma^i_{hk})e^h \otimes e^k \Leftrightarrow \nabla_h\phi_k = \phi_{k;h} = \mathbf{e}_h(\phi_k) - \gamma^i_{hk}\phi_i. \quad (2.40)$$

Lo stesso discorso si può ripetere per il generico tensore $T = T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$:

$$\begin{aligned} \nabla_Y T &= \nabla_Y (T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}) = Y(T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}) \otimes \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + \\ &\quad T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \nabla_Y \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \nabla_Y \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + \\ &\quad T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes \nabla_Y e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes \nabla_Y e^{j_s} = \\ &\quad Y^h (\mathbf{e}_h(T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^k_{hi_1} \mathbf{e}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} + \\ &\quad \dots + T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^k_{hi_r} \mathbf{e}_k \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} - T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^{j_1}_{hk} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^k \otimes \dots \otimes e^{j_s} - \\ &\quad \dots T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^{j_s}_{hk} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^k) = Y^h (\mathbf{e}_h(T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}) + T^{k, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^{i_1}_{hk} + \\ &\quad \dots + T^{i_1, \dots, k}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^i_{hk} - T^{i_1, \dots, i_r}_{k, \dots, j_s} \gamma^k_{hj_1} - \dots - T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, k} \gamma^k_{hj_s}) \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \end{aligned}$$

Da quest'ultima e dalla (2.31), si ricava

$$\begin{aligned} \nabla_h T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} &= \mathbf{e}_h(T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s}) + T^{k, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^{i_1}_{hk} + \dots + T^{i_1, \dots, k}_{j_1, \dots, j_s} \gamma^{i_r}_{hk} \\ &\quad - T^{i_1, \dots, i_r}_{k, \dots, j_s} \gamma^k_{hj_1} - \dots - T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, k} \gamma^k_{hj_s}, \end{aligned}$$

che in una base naturale diventa:

$$\begin{aligned} \nabla_h T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} &= \partial_h T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} + \Gamma^{i_1}_{hk} T^{k, \dots, i_r}_{j_1, \dots, j_s} + \dots + \Gamma^{i_r}_{hk} T^{i_1, \dots, k}_{j_1, \dots, j_s} \\ &\quad - \Gamma^k_{hj_1} T^{i_1, \dots, i_r}_{k, \dots, j_s} - \dots - \Gamma^k_{hj_s} T^{i_1, \dots, i_r}_{j_1, \dots, k}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Osservazione 7 Alle componenti delle derivate covarianti di un campo di tensori, sono applicabili alcune regole di calcolo delle derivate ordinarie. Per esempio se X è un campo di tensori identicamente nullo $\nabla_i X^j = 0$, mentre se le componenti di X sono costanti, $\nabla_i X^j = \Gamma^j_{ih} X^h$, che in generale non è identicamente nullo. Un'altra regola che è possibile applicare è la regola di derivazione di un prodotto, per esempio $\nabla_i (X^j Y_h) = \partial_i (X^j Y_h) + \Gamma^j_{ik} X^k Y_h - \Gamma^k_{ih} X^j Y_k = (\partial_i X^j + \Gamma^j_{ik} X^k) Y_h + X^j (\partial_i Y_h - \Gamma^k_{ih} Y_k)$. Si può vedere che la derivata covariante commuta con l'operazione di saturazione degli indici, per esempio se $T_j = T^i_{ji}$, allora saturando gli indici i e h in $T^i_{jh;k} = \partial_k T^i_{jh} + \Gamma^i_{kr} T^r_{jh} - \Gamma^r_{kj} T^i_{rh} - \Gamma^r_{kh} T^i_{jr}$, si ottiene $T^i_{ji;k} = \partial_k T^i_{ji} + \Gamma^i_{kr} T^r_{ji} - \Gamma^r_{kj} T^i_{ri} - \Gamma^r_{ki} T^i_{jr} = \partial_k T_j - \Gamma^r_{kj} T_r = T_{j;k}$. Inoltre se $T_{ij} = -T_{ji}$ allora $T_{ij;r} = \partial_r T_{ij} - \Gamma^r_{ki} T_{rj} - \Gamma^r_{kj} T_{ir} = -T_{j;r}$. In definitiva si può operare con le derivate covarianti, come se l'indice $;k$ fosse un qualunque altro indice.

2.6.5 Torsione

Dalla (2.31) e dalla prima condizione della definizione 2.6.6, si ricava che, fissata una funzione f , $\nabla f(Y) = \nabla_Y f = Y(f) = Y^h \mathbf{e}_h(f) = \mathbf{e}_h(f) e^h(Y) \quad \forall Y$, quindi in una base naturale $\nabla f = \partial_h f dx^h$. Da questa e dall'equazione (2.41) che esprime la derivata covariante di un tensore in una base naturale, si ottiene:

$$\nabla_i \nabla_j f = \nabla_i \partial_j f = \partial_{ij}^2 f - \Gamma^h_{ij} \partial_h f,$$

ed invertendo l'ordine di derivazione

$$\nabla_j \nabla_i f = \nabla_j \partial_i f = \partial_{ji}^2 f - \Gamma^h_{ji} \partial_h f,$$

da cui sottraendo membro a membro e tenendo conto che, con l'ordine di differenziabilità supposto per f , le derivate seconde si possono invertire, si trova che

$$\nabla_j \nabla_i f - \nabla_i \nabla_j f = T^h_{ij} \partial_h f \quad \text{con} \quad T^h_{ij} = \Gamma^h_{ij} - \Gamma^h_{ji}. \quad (2.42)$$

Per il criterio di tensorialità, se si tiene conto che, al primo membro c'è la differenza delle componenti di due tensori e che $\partial_h f$ sono le componenti di ∇f , T^h_{ij} sono le componenti di un tensore che si chiama **tensore di torsione**.⁹

Quindi il tensore di torsione misura la non commutatività delle derivate covarianti seconde di una funzione.

Definizione 2.6.7 Una connessione si dice **simmetrica** se il tensore di torsione è identicamente nullo: $T^h_{ij} = 0 \Leftrightarrow \Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}$.

La connessione introdotta negli spazi affini nella prima parte era simmetrica.

⁹la tensorialità di T^h_{ij} si può ricavare anche dalla (2.24) sottraendo ambo i membri dell'equazione data da quelli dell'equazione ottenuta scambiando gli indici in basso ed osservando che le derivate seconde della trasformazione delle coordinate commutano.

2.6.6 Tensore di curvatura

Consideriamo un campo di vettori X e calcoliamo due volte la derivata covariante in una data carta locale:

$$\begin{aligned}\nabla_i \nabla_j X^h &= \partial_i \nabla_j X^h + \Gamma^h_{ik} \nabla_j X^k - \Gamma^k_{ij} \nabla_k X^h = \partial_{ij}^2 X^h + \partial_i (\Gamma^h_{jk} X^k) + \Gamma^h_{ik} (\partial_j X^k + \Gamma^k_{jr} X^r) - \Gamma^k_{ij} \nabla_k X^h = \\ &\partial_{ij}^2 X^h + X^k \partial_i \Gamma^h_{jk} + \Gamma^h_{jk} \partial_i X^k + \Gamma^h_{ik} \partial_j X^k + \Gamma^h_{ir} \Gamma^r_{jk} X^k - \Gamma^k_{ij} \nabla_k X^h,\end{aligned}$$

scambiando gli indici i e j

$$\nabla_j \nabla_i X^h = \partial_{ji}^2 X^h + X^k \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^h_{ik} \partial_j X^k + \Gamma^h_{jk} \partial_i X^k + \Gamma^h_{jr} \Gamma^r_{ik} X^k - \Gamma^k_{ji} \nabla_k X^h$$

e sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$\nabla_i \nabla_j X^h - \nabla_j \nabla_i X^h = X^k (\partial_i \Gamma^h_{jk} - \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^h_{ir} \Gamma^r_{jk} - \Gamma^h_{jr} \Gamma^r_{ik}) - (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) \nabla_k X^h,$$

da cui, tenendo conto che $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ é il tensore di torsione e definendo

$$R^h_{kij} = \partial_i \Gamma^h_{jk} - \partial_j \Gamma^h_{ik} + \Gamma^h_{ir} \Gamma^r_{jk} - \Gamma^h_{jr} \Gamma^r_{ik}, \quad (2.43)$$

si ricava

$$\nabla_i \nabla_j X^h - \nabla_j \nabla_i X^h = R^h_{kij} X^k - T^k_{ij} \nabla_k X^h. \quad (2.44)$$

Poiché il primo membro della (2.44) é un tensore, perché differenza di due tensori e $T^k_{ij} \nabla_k X^h$ é un tensore, perché prodotto contratto tra due tensori, $R^h_{kij} X^k$ é un tensore, ma per l'arbitrarietà di X e per il criterio di tensorialità la (2.43) definisce un tensore che si chiama **tensore di curvatura** o **tensore di Riemann**.

Definizione 2.6.8 Una connessione si dice **piatta** quando il tensore di curvatura é identicamente nullo.

La connessione definita nello spazio affine nella prima parte é piatta, perché in coordinate cartesiane i coefficienti della connessione sono identicamente nulli e quindi, il tensore di curvatura, in base alla definizione (2.43), é identicamente nullo.

Osservazione 8 I coefficienti della connessione possono essere identicamente nulli in un sistema di coordinate e non esserlo in un altro, però in questo caso il tensore di curvatura deve essere identicamente nullo in tutti i sistemi di coordinate, perché, a differenza dei coefficienti della connessione, esso é un tensore.

Il tensore di curvatura, assieme al tensore di torsione misura la non commutatività delle derivate covarianti seconde di un campo di vettori. In particolare, se la connessione é simmetrica, le derivate covarianti di una funzione commutano, ma non commutano le derivate covarianti di un campo di vettori. Se poi la connessione é anche piatta, commutano sia le derivate covarianti di una funzione che quelle di un campo di vettori.

Il tensore di curvatura gode delle seguenti simmetrie:

$$R^h_{kij} = -R^h_{kji} \quad \Leftrightarrow \quad R^h_{k(ij)} = 0, \quad (2.45)$$

$$R^h_{[kij]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^h_{kij} + R^h_{jki} + R^h_{ikj} = 0 \quad (2.46)$$

ed infine le **identità di Bianchi** che riguardano alla derivata covariante del tensore di curvatura:

$$R^h_{k[ij;r]} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^h_{kij;r} + R^h_{kri;j} + R^h_{kjr;i} = 0. \quad (2.47)$$

Definizione 2.6.9 Si chiama **tensore di Ricci**, il tensore ottenuto contraendo l'indice di controvarianza con il secondo indice di covarianza del tensore di curvatura:

$$R_{ik} = R^h_{ihk}. \quad (2.48)$$

2.6.7 Equazione della deviazione geodetica

Consideriamo una famiglia di geodetiche (**congruenza**) $\gamma(t, s)$, dove t é un parametro affine e s é un parametro che individua ciascuna geodetica. Supporremo che γ sia di classe C^h con $h > 1$, per cui ha senso considerare oltre al campo di vettori $V(t, s) = \frac{\partial}{\partial t}(t, s)$ tangente alle geodetiche, anche il campo di vettori $N(t, s) = \frac{\partial}{\partial s}(t, s)$ tangente alle curve $t = \text{cost.}$. Supporremo, inoltre che i due campi di vettori V e N non siano mai paralleli fig. (2.7). Intuitivamente, il vettore $N(t, s)$ dá la *separazione infinitesima* tra il punto $P(t, s)$ ed il punto $P(t, s + ds)$, la sua derivata nella direzione di V : $\nabla_V N$ dá la *velocità relativa* tra i due punti, mentre la derivata seconda nella direzione di V : $\nabla_V \nabla_V N$ dá l'*accelerazione relativa* tra i due punti.

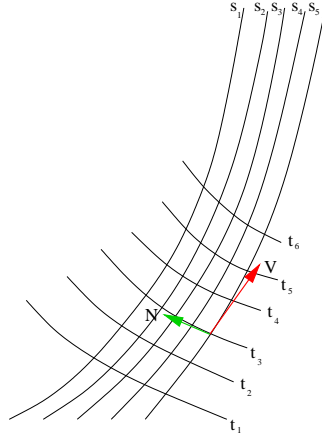


Figure 2.7: Deviazione geodetica

Esempio 18 Consideriamo nello spazio affine un sistema di coordinate cartesiane (x^1, x^2, \dots, x^n) ed una congruenza di rette (geodetiche) di equazioni parametriche $x^i(t, s) = a^i(s)t + b^i(s)$, essendo $a^i(s)$ e $b^i(s)$, funzioni di classe C^1 . I vettori N e V hanno componenti rispettivamente $N^i = \frac{\partial x^i}{\partial s} = \frac{da^i}{ds}(s)t + \frac{db^i}{ds}(s)$ e $V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$. Poiché i coefficienti della connessione sono identicamente nulli, $\nabla_V N = \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{da^i}{dt}(s)$ e $\nabla_v \nabla_v N = \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = 0$. Quindi, in questo caso, la velocità relativa è non nulla se le rette non sono parallele ($\frac{da^i}{ds} \neq 0$), l'accelerazione relativa invece è sempre nulla indipendentemente dalla congruenza scelta. Ciò fa pensare che, il non annullarsi dell'accelerazione relativa, sia una proprietà della varietà in cui la congruenza di geodetiche viene assegnata, piuttosto che della congruenza stessa.

Proposizione 2.6.4 Se la connessione è simmetrica, vale la seguente

$$\nabla_V \nabla_V N^h = R^h{}_{kij} V^k V^i N^j, \quad (2.49)$$

che si chiama **equazione della deviazione geodetica**.

Dimostrazione. Cominciamo con il dimostrare che

$$\nabla_V N = \nabla_N V \Leftrightarrow V^i \nabla_i N^j = N^i \nabla_i V^j. \quad (2.50)$$

Infatti, fissata una qualunque carta $(U, \varphi, x^1, x^2, \dots, x^n)$, che intersechi la data congruenza, $V^i = \frac{\partial x^i}{\partial t}$ e $N^i = \frac{\partial x^i}{\partial s}$ da cui

$$V^i \nabla_i N^j = \frac{\partial x^i}{\partial t} (\partial_i (\frac{\partial x^j}{\partial s}) + \Gamma^j{}_{ih} N^h) = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t \partial s} + \Gamma^j{}_{ih} V^i N^h = \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \partial t} + \Gamma^j{}_{ih} V^h N^i = \frac{\partial x^i}{\partial s} (\partial_i (\frac{\partial x^j}{\partial t}) + \Gamma^j{}_{ih} V^h) = N^i \nabla_i V^j,$$

in cui si è usata la commutatività delle derivate e la simmetria della connessione. Applicando la (2.44) e la (2.50), si ricava

$$\begin{aligned} \nabla_V \nabla_V N^h &= V^i \nabla_i (V^j \nabla_j N^h) = V^i \nabla_i (N^j \nabla_j V^h) = V^i \nabla_i N^j \nabla_j V^h + V^i N^j \nabla_i \nabla_j V^h = \\ &= N^i \nabla_i V^j \nabla_j V^h + V^i N^j \nabla_j \nabla_i V^h + V^i N^j R^h{}_{kij} V^k = N^i (\nabla_i V^j \nabla_j V^h + V^j \nabla_i \nabla_j V^h) + R^h{}_{kij} V^k V^i N^j = \\ &= N^i \nabla_i (V^j \nabla_j V^h) + R^h{}_{kij} V^k V^i N^j, \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto che, essendo V tangente a delle geodetiche, deve verificare l'equazione $V^i \nabla_i V^j = 0$, si ottiene la (2.49). •

2.6.8 Significato geometrico del tensore di curvatura

Consideriamo una congruenza di curve (non necessariamente geodetiche) $\gamma(t, s)$ come nel paragrafo precedente e come prima chiamiamo $V = \frac{\partial}{\partial t}$ e $N = \frac{\partial}{\partial s}$. Consideriamo il quadrilatero formato dai punti $A = (t, s)$, $B = (t + \Delta t, s)$, $C = (t, s + \Delta s)$, $D = (t + \Delta t, s + \Delta s)$, fig.2.8. Fissato un vettore $\mathbf{u}(A) \in T_A$, trasportiamolo parallelamente lungo l'arco di curva AB in $\mathbf{u}(B) \in T_B$ e quest'ultimo lungo BD in $\mathbf{u}(D)$. Facciamo la stessa cosa utilizzando il percorso ACD , cioè $\mathbf{u}(A)$ viene trasportato parallelamente lungo AC in $\mathbf{u}(C)$ e quest'ultimo viene trasportato parallelamente lungo CD in $\mathbf{u}'(D)$. Così facendo lo stesso vettore $\mathbf{u}(A)$ è stato trasportato parallelamente, seguendo due percorsi diversi nei vettori $\mathbf{u}(D)$, $\mathbf{u}'(D) \in T_D$, vogliamo vedere in che relazione stanno questi vettori.

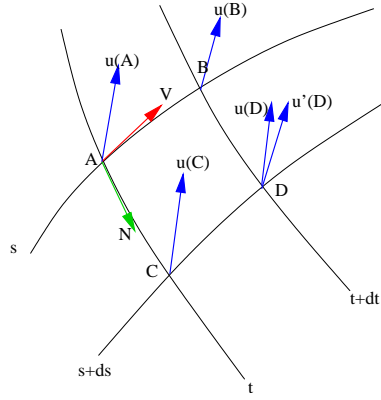


Figure 2.8: Vettore trasportato parallelamente lungo due percorsi diversi

Poiché $\mathbf{u}(B)$ é trasportato parallelamente lungo AB , deve verificare l'equazione (2.27), quindi a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$u^i(B) \simeq u^i(A) + \frac{du^i}{dt}(A)\Delta t = u^i(A) - \Gamma^i_{jh}(A)V^j(A)u^h(A)\Delta t.$$

Scegliendo un sistema di coordinate normali geodetiche centrato in A , si ha $\Gamma^i_{jh}(A) = 0$, quindi l'equazione precedente si riduce, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo

$$u^i(B) \simeq u^i(A).$$

Seguendo lo stesso ragionamento di prima si trova:

$$u^i(D) \simeq u^i(B) + \frac{du^i}{ds}(B)\Delta s = u^i(B) - \Gamma^i_{jh}(B)N^j(B)u^h(B)\Delta s = u^i(A) - \Gamma^i_{jh}(B)N^j(B)u^h(A)\Delta s.$$

Seguendo l'altro percorso si ottiene, come prima

$$u^i(C) \simeq u^i(A)$$

e

$$u^i(D) \simeq u^i(C) + \frac{du^i}{dt}(C)\Delta t = u^i(C) - \Gamma^i_{jh}(C)V^j(C)u^h(C)\Delta t = u^i(A) - \Gamma^i_{jh}(C)V^j(C)u^h(A)\Delta t.$$

Da cui

$$u^i(D) - u^i(D) = -\Gamma^i_{jh}(C)V^j(C)u^h(A)\Delta t + \Gamma^i_{jh}(B)N^j(B)u^h(A)\Delta s, \quad (2.51)$$

d'altra parte, a meno di infinitesimi di ordine superiore

$$\Gamma^i_{jh}(C)V^j(C) = (\Gamma^i_{jh}(A) + \partial_k \Gamma^i_{jh}(A) \frac{\partial x^k}{\partial s} \Delta s) V^j(A) = \partial_k \Gamma^i_{jh}(A) N^k(A) V^j(A) \Delta s$$

e

$$\Gamma^i_{jh}(B)N^j(B) = (\Gamma^i_{jh}(A) + \partial_k \Gamma^i_{jh}(A) \frac{\partial x^k}{\partial t} \Delta t) N^j(A) = \partial_k \Gamma^i_{jh}(A) V^k(A) N^j(A) \Delta t,$$

che sostituite nella (2.51), danno

$$\begin{aligned} u^i(D) - u^i(D) &= -\partial_k \Gamma^i_{jh}(A) N^k(A) V^j(A) u^h(A) \Delta t \Delta s + \partial_k \Gamma^i_{jh}(A) V^k(A) N^j(A) u^h(A) \Delta s \Delta t = \\ &= (\partial_k \Gamma^i_{jh}(A) - \partial_j \Gamma^i_{kh}(A)) V^k(A) N^j(A) u^h(A) \Delta s \Delta t = R^i_{hjk}(A) V^k(A) N^j(A) u^h(A) \Delta s \Delta t. \end{aligned}$$

Cosí, il termine di ordine piú basso e quindi preponderante per Δt e Δs piccoli, della differenza tra i due vettori, dipende dal tensore di curvatura. Si puó concludere dicendo che il tensore di curvatura misura la differenza del trasporto parallelo di un vettore lungo due curve diverse o equivalentemente la differenza tra un vettore ed il suo trasportato parallelamente lungo una curva chiusa.

2.6.9 Formulazione geometrica della gravitazione newtoniana

L'apparato matematico fino ad ora sviluppato, ci consente di dare una formulazione geometrica della teoria gravitazionale classica. In Meccanica classica, bisogna considerare un tempo assoluto, quindi ogni formulazione quadridimensionale di essa, deve avvenire nello schema di una varietà M_4 che è una foliazione di ipersuperfici tridimensionali Σ_t di equazione $t = cost$, che possiamo supporre diffeomorfe ad \mathfrak{R}^3 . Su tale varietà possiamo considerare un sistema di coordinate globali (t, x^1, x^2, x^3) , dove (x^1, x^2, x^3) sono coordinate cartesiane di \mathfrak{R}^3 , corrispondenti ad un sistema di riferimento inerziale, trasportate dal diffeomorfismo sulle ipersuperfici Σ_t .

Per il principio d'inerzia, ogni punto materiale isolato si muove di moto rettilineo ed uniforme, quindi le sue equazioni di moto sono

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0,$$

che è l'equazione delle geodetiche per una connessione piatta.

Supponiamo, ora, che il punto non sia isolato, ma che si muova in un campo gravitazionale di energia potenziale ϕ , allora le sue equazioni di moto sono

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.52)$$

A questo punto ci si può porre il problema di determinare una connessione su M_4 , in maniera tale che l'equazione delle geodetiche, coincida con la (2.52). Se ciò fosse possibile, si potrebbe ridurre il campo gravitazionale ad un fatto puramente geometrico, cioè il campo gravitazionale potrebbe essere considerato, non una forza a distanza, ma una deformazione della geometria (connessione non piatta), a causa della quale il moto più naturale: il moto geodetico, non è una linea retta, ma una traiettoria curva. In altre parole, l'incurvarsi della traiettoria di un punto in un campo gravitazionale, non è dovuto ad una forza ma alla stessa geometria dello spazio-tempo.

Il problema posto sopra ha una soluzione immediata, infatti, confrontando l'equazione (2.52) con l'equazione delle geodetiche (2.28), si vede che esse coincidono pur di prendere il parametro affine coincidente con il tempo t e come coefficienti della connessione

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad \mu = 1, 2, 3$$

e tutti gli altri nulli.

Il tensore di curvatura di tale connessione ha una sola componente non nulla:

$$R^\mu_{0\nu 0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

quindi la connessione è non piatta, tranne nel caso in cui il campo gravitazionale è costante. Dall'equazione della deviazione geodetica, si ricava che l'accelerazione relativa tra due particelle in caduta libera (moto geodetico), esprime le **forze mareali**, dipende dal tensore di curvatura e quindi dalle derivate seconde del potenziale. Si possono distinguere, così i seguenti casi:

1. campo gravitazionale uniforme \Rightarrow connessione piatta \Rightarrow assenza di forze mareali \Rightarrow scomparsa completa del campo gravitazionale in un sistema di riferimento in caduta libera;
2. campo gravitazionale non uniforme \Rightarrow connessione non piatta \Rightarrow presenza di forze mareali \Rightarrow in un sistema di riferimento in caduta libera (coordinate normali geodetiche), si può rendere piccolo a piacere il campo gravitazionale, considerando zone sempre più ristrette di spazio-tempo, ma non lo si può annullare del tutto, se non in un punto.

Infine, tenendo conto che l'unica componente non nulla del tensore di Ricci è

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} = \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\mu \partial x^\mu} = \Delta^2 \phi,$$

l'equazione di Poisson

$$\Delta^2 \phi = 4\pi G\rho,$$

si può anche scrivere

$$R_{00} = 4\pi G\rho. \quad (2.53)$$

2.7 Varietá riemanniane

Definizione 2.7.1 Una struttura riemanniana su una varietá differenziabile M_n di classe C^K con $k > 2$, é un campo di tensori metrici di classe C^h con $h > 1$ definito su tutto M_n . Se, in particolare, i tensori metrici sono propriamente euclidei, tale struttura si chiamerá **propriamente riemanniana**, altrimenti **pseudo-riemanniana**.

Definizione 2.7.2 Una varietá differenziabile M_n di classe C^K con $k \leq 2$, con una struttura riemanniana, si chiama **varietá riemanniana**. Se la struttura é propriamente riemanniana, la varietá si dirá **propriamente riemanniana**, altrimenti si dirá **pseudo-riemanniana**.

Teorema 2.7.1 Su una varietá differenziabile M_n é sempre possibile costruire una struttura propriamente riemanniana.

Senza dimostrazione.

In generale su una stessa varietá differenziabile é possibile introdurre piú strutture riemanniane. Cosí esistono varietá riemanniane distinte che hanno la stessa topologia e la stessa struttura differenziabile, cioè sono diffeomorfe.

Esempio 19 Considerato \mathbb{R}^3 con il tensore metrico $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ in un dato sistema di riferimento cartesiano $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, su una qualunque superficie regolare di equazioni parametriche $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, si può definire in maniera naturale una metrica indotta da quella euclidea semplicemente sostituendo i differenziali delle equazioni parametriche nella metrica euclidea.

Cosí, per esempio, se consideriamo una sfera di centro l'origine e raggio R , le sue equazioni parametriche $x = R \sin \theta \cos \phi, y = R \sin \theta \sin \phi, z = R \cos \theta$ definiscono una carta locale nell'aperto $U = S^2 - \{N, S, \gamma\}$, dove $N = (0, 0, R)$, $S = (0, 0, -R)$ e γ é la curva di equazione $\phi = 0$ e dove l'aperto di \mathbb{R}^2 a cui U é omeomorfo é il rettangolo aperto $\{(\theta, \phi) \mid 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$. Non é difficile capire che, dopo un'opportuna rotazione degli assi cartesiani in \mathbb{R}^3 , ridefinendo le equazioni parametriche di S^2 in tale riferimento, si ottiene un'altra carta, il cui dominio V ricopre assieme ad U , S^2 . Calcolando dx, dy, dz , si trova il tensore metrico sulla sfera: $d\sigma^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$. Tale tensore metrico é singolare solo per $\sin \theta = 0$ cioè nei punti N e S in cui le coordinate non sono definite. Se invece si considera l'ellissoide rotondo E^2 di centro l'origine e semiassi $a, b = a, c$, le sue equazioni parametriche sono: $x = a \sin \theta \cos \phi, y = a \sin \theta \sin \phi, z = c \cos \theta$, si può ripetere, come nel caso della sfera, il discorso sulle coordinate, mentre la metrica indotta da \mathbb{R}^3 é $d\sigma^2 = (a^2 \cos^2 \theta + c^2 \sin^2 \theta) d\theta^2 + a^2 \sin^2 \theta d\phi^2$, che, come nel caso della sfera, é singolare dove le coordinate (θ, ϕ) non sono definite. Cosí S^2 e E^2 , pur essendo, come varietá differenziabili, indistinguibili perché diffeomorfe, come varietá riemanniane sono distinte perché hanno un diverso tensore metrico.

Un cilindro C di equazioni parametriche $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, z = z$, ha un carta locale definita nell'aperto $U = C - s$, dove s é la retta $\theta = 0$ ed dove l'aperto di \mathbb{R}^2 a cui U é omeomorfo é la striscia $\{(\theta, z) \mid 0 < \theta < 2\pi, \infty < z < +\infty\}$. Un atlante si può costruire prendendo un'altra carta, identica alla precedente, ma ruotata di un angolo θ_0 , rispetto alla prima. La metrica indotta da \mathbb{R}^3 é $d\sigma^2 = (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) d\theta^2 + dz^2$.

Esempio 20 L'insieme delle possibili configurazioni per un sistema meccanico a vincoli olonomi, bilateri ed indipendenti dal tempo, é rappresentato dallo **spazio delle configurazioni**, che é una varietá differenziabile le cui carte locali sono costituite da tutti i possibili sistemi di coordinate lagrangiane definibili su di esso. L'energia cinetica del sistema $T = \frac{1}{2} a_{hk}(q^1, q^2, \dots, q^n) \dot{q}^h \dot{q}^k$, definisce in maniera naturale una struttura propriamente riemanniana $ds^2 = \frac{1}{2} a_{hk}(q^1, q^2, \dots, q^n) dq^h dq^k$, perché la matrice $\|a_{hk}(q^1, q^2, \dots, q^n)\|$ é definita positiva in ogni configurazione. Sistemi meccanici distinti possono avere come spazio delle configurazioni la stessa varietá differenziabile, ma, in generale, avendo energie cinetiche distinte, hanno anche strutture riemanniane distinte.

Cosí, per esempio un punto P vincolato a muoversi sul toro di equazioni parametriche $x = (a + R \cos \theta) \cos \phi, y = (a + R \cos \theta) \sin \phi, z = R \sin \theta$, con $a > R$, ha, ovviamente, come spazio delle configurazioni un toro, la sua energia cinetica é $T = \frac{1}{2} m(R^2 \dot{\theta}^2 + (a + R \cos \theta)^2 \dot{\phi}^2)$, che, per quanto detto sopra, definisce sul toro la struttura riemanniana $d\sigma^2 = \frac{1}{2} m(R^2 d\theta^2 + (a + R \cos \theta)^2 d\phi^2)$, che, a meno della costante $\frac{1}{2} m$, é proprio la metrica indotta da \mathbb{R}^3 .

Consideriamo un pendolo doppio (fig. 2.9), cioè un sistema, vincolato a muoversi su un piano, formato da due aste AB e BC , incernierate nell'estremo B , con il punto A fisso e le cui configurazioni sono determinate dagli angoli θ e ϕ che le due aste formano con una direzione fissata. Tutte e sole le configurazioni di tale sistema si ottengono per (θ, ϕ) appartenenti al quadrato $Q = \{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$. Però, se si tiene conto che per $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ si ottengono le stesse configurazioni ed analogamente per $\phi = 0$ e per $\phi = 2\pi$, lo spazio delle configurazioni é il quadrato Q con i lati opposti identificati, cioè é topologicamente un toro. Comunque la sua energia cinetica, nell'ipotesi che le due aste abbiano la stessa massa m e la stessa lunghezza l , é $T = \frac{1}{6} ml^2(4\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 3 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi})$, che determina sul toro una metrica diversa da quella precedente. Per concludere, si sono considerati due sistemi meccanici completamente diversi, il cui spazio delle configurazioni é topologicamente un toro, ma con una struttura riemanniana diversa. Si pensi per esempio che nel primo caso, le linee coordinate sono sempre ortogonali, perché il tensore metrico ha forma diagonale, mentre nel secondo caso, le linee coordinate sono ortogonali solo nei punti in cui si annulla la funzione $\cos(\theta - \phi)$.

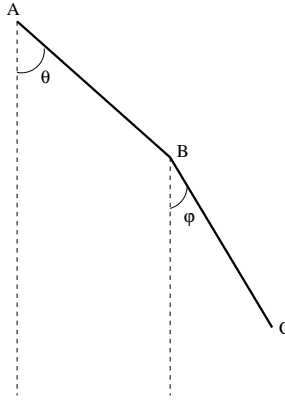


Figure 2.9: Pendolo doppio

Per le varietà riemanniane vale quanto detto per gli spazi affini con un tensore metrico, tranne il fatto che, in generale, non esistono sistemi di coordinare in cui le componenti del tensore metrico sono costanti. Così, per esempio, il tensore metrico consente di calcolare, in ogni spazio tangente, il modulo dei vettori e gli angoli che essi formano. In particolare se $\gamma(t)$ è una curva di classe C^h con $h \geq 1$ di equazioni parametriche $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ in una data carta locale, allora la funzione $\frac{ds}{dt}(t) = \sqrt{|g_{ij}(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t)|}$ che esprime, per ogni t , il modulo del vettore tangente nel punto $\gamma(t)$, ci consente di calcolare la lunghezza dell'arco di curva congiungente i punti $A = \gamma(a)$ e $B = \gamma(b)$, con la solita formula

$$\int_a^b \frac{ds}{dt}(t) dt. \quad (2.54)$$

Per questo motivo, come negli spazi affini, il tensore metrico rappresenta intuitivamente il quadrato della distanza tra due punti infinitamente vicini della varietà.

Analogamente, introdotto un tensore metrico in ogni spazio tangente, è possibile eseguire, con le solite regole, le operazioni di abbassamento ed innalzamento degli indici dei tensori.

2.7.1 Conessioni riemanniane

A partire da una struttura riemanniana, è possibile definire una particolare connessione.

Proposizione 2.7.1 *In una varietà riemanniana esiste una ed una sola connessione ∇ che gode delle seguenti proprietà:*

1. ∇ è simmetrica;
2. $\nabla_i g_{jh} = 0$: il tensore metrico ha derivata covariante identicamente nulla.

Dimostrazione. Imponendo che $\nabla_i g_{jh} = \partial_i g_{jh} - \Gamma^k_{ij} g_{kh} - \Gamma^k_{ih} g_{jk} = 0$, riscrivendo due volte la stessa equazione con gli indici permutati, sommando e utilizzando l'ipotesi che la connessione è simmetrica, si perviene, con gli stessi calcoli fatti nella prima parte, all'unica forma possibile per una tale connessione;

$$\Gamma^i_{jh} = \frac{1}{2} g^{ik} (\partial_j g_{kh} + \partial_h g_{jk} - \partial_k g_{jh}). \quad (2.55)$$

La connessione definita dal teorema precedente si chiama **connessione riemanniana** ed i coefficienti di tale connessione si chiamano anche, come nella prima parte, **coefficienti di Christoffell**. Tale connessione ci consente di estendere alle varietà riemanniane tutto quello che è stato fatto, nei paragrafi precedenti, sulle connessioni generiche e sulle loro conseguenze, come la nozione di trasporto parallelo, geodetica, tensore di curvatura etc..

In più, per una connessione riemanniana valgono delle proprietà che per una connessione generica non sono valide, per esempio, il tensore di curvatura, definito a partire da una connessione riemanniana, è dotato delle seguenti ulteriori simmetrie:¹⁰

$$R_{(ij)hk} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_{ijhk} = -R_{jihk}, \quad (2.56)$$

$$R_{ijhk} = R_{hki j}, \quad (2.57)$$

¹⁰si ricorda che $R_{ijhk} = g_{is} R^s_{jkh}$

in particolare quest'ultima implica che il tensore di Ricci é simmetrico:

$$R_{ij} = R^k{}_{ikj} = g^{hk} R_{hikj} = g^{kh} R_{kjhi} = R^k{}_{jki} = R_{ji}. \quad (2.58)$$

Definizione 2.7.3 Si chiama **scalare di curvatura** la funzione ottenuta contraendo gli indici del tensore di Ricci:

$$R = g^{ij} R_{ij} = R^i{}_i. \quad (2.59)$$

Osservazione 9 Se il tensore metrico é costante, cioè ha componenti costanti in uno o piú o tutti i sistemi di coordinate, in tali sistemi di coordinate, per la (2.55), i coefficienti della connessione si annullano, da cui il tensore di curvatura é identicamente nullo, quindi la connessione é localmente piatta, se ciò avviene in un aperto U diverso da M_n , o é piatta se il tensore di curvatura é identicamente nullo in M_n . Questa é una cosa che si riconosce subito in uno spazio affine, dove in un sistema di coordinate cartesiane il tensore metrico ha la forma $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$. In generale il test conclusivo per vedere se la connessione é piatta, é il calcolo del tensore di curvatura, come vedremo nei seguenti esempi.

Esempio 21 Consideriamo la sfera S^2 di raggio R , si é visto negli esempi precedenti che tale superficie é caratterizzata, oltre che da una determinata topologia e struttura differenziabile, anche da una struttura riemanniana espressa da $ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$. Calcolando i coefficienti della connessione con l'aiuto delle (2.55) ed associando alla variabile θ l'indice 0 ed alla variabile ϕ l'indice 1, si vede che i soli coefficienti non nulli sono $\Gamma^0{}_{11} = -\sin\theta \cos\theta$ e $\Gamma^1{}_{01} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Poiché per una connessione riemanniana il tensore di curvatura é antisimmetrico rispetto alla prima coppia di indici oltre che rispetto alla seconda e trovandoci in due dimensioni, la sola componente indipendente del tensore di curvatura che può non essere nulla é $R_{0101} = g_{00}R^0{}_{101} = R^2(\partial_0\Gamma^0{}_{11} - \Gamma^0{}_{11}\Gamma^1{}_{01}) = R^2\sin^2\theta \neq 0$, perché le coordinate non sono definite per $\sin\theta = 0$. Quindi la sfera é un esempio di connessione non piatta.

Esempio 22 Consideriamo il cilindro di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la cui struttura riemanniana, come si é visto in uno degli esempi precedenti, é data da $ds^2 = (a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)d\theta^2 + dz^2$. Se $a = b$, il tensore metrico é costante, quindi per quanto é stato osservato prima la connessione é piatta. Per decidere se la connessione é piatta anche per $a \neq b$, bisogna calcolare il tensore di curvatura. L'unico coefficiente della connessione non nullo é $\Gamma^0{}_{00}$, d'altra parte $R_{0101} = g_{00}R^0{}_{101} = g_{00}(\partial_0\Gamma^0{}_{11} - \partial_1\Gamma^0{}_{10} + \Gamma^0{}_{0h}\Gamma^h{}_{11} - \Gamma^0{}_{1h}\Gamma^h{}_{10}) = 0$, perché l'unico addendo in cui compare $\Gamma^0{}_{00}$ é $\Gamma^0{}_{00}\Gamma^0{}_{11} = 0$. Quindi la connessione é piatta anche nel caso generale.

Osservazione 10 Una connessione non piatta determina una geometria non euclidea, nel senso che se si considera un triangolo geodetico e si misurano gli angoli interni con l'angolo formato dai vettori tangenti nei vertici, la loro somma non é π , come avviene in una geometria in cui vale il postulato delle parallele. Si può, quindi, concludere che la geometria di una sfera non é euclidea, mentre quella del cilindro é una geometria euclidea. Quest'ultima affermazione può sembrare strana perché un cilindro é topologicamente $S^1 \times \mathbb{R}^1$ e quindi non é omeomorfo a \mathbb{R}^2 . D'altra parte se si considera $S^2 - \{N\}$ cioè la sfera meno un punto, come si é visto nei paragrafi precedenti si può costruire un omeomorfismo (la proiezione stereografica) con \mathbb{R}^2 , ma togliere un solo punto non cambia certamente la connessione. Quindi ci possono essere topologie euclidee con connessioni non piatte e topologie non euclidee con connessioni piatte. Questo dipende dal fatto che la topologia riguarda le proprietà globali della varietà: basta togliere un punto per cambiare topologia, mentre la struttura riemanniana é legata alle proprietà locali, si pensi che il tensore di curvatura, in una connessione riemanniana, é costruito con le derivate prime e seconde del tensore metrico, quindi il valore del tensore di curvatura in un dato punto P , dipende dal valore del tensore metrico in un intorno piccolo a piacere di P ed é quindi insensibile alle proprietà globali della varietà.

Esistono teoremi che legano la topologia alla curvatura, come il teorema di Gauss-Bonnet, ma in quel caso entra in gioco la curvatura media.

2.7.2 Geodetiche in una varietà riemanniana

Poiché ogni varietà riemanniana é dotata di una connessione (riemanniana), é possibile definire, come in ogni altra connessione, una classe particolare di curve, le curve geodetiche, come quelle curve il cui vettore tangente é trasportato parallelamente su esse: curve autoparallele. Tale definizione é stata data nel tentativo di generalizzare il concetto di retta, infatti le rette sono le sole curve autoparallele in uno spazio affine. Però esiste un'altra proprietà caratterizzante le rette in uno spazio affine, che può servire come punto di partenza per generalizzare il concetto di retta: *dati due punti distinti P e Q , tra tutte le curve congiungenti P e Q , un segmento di retta é quello di minima lunghezza*. Tale proprietà delle rette può essere estesa solo su varietà riemanniane, perché solo su esse ha senso il concetto di lunghezza di una curva differenziabile.

¹¹la topologia prodotto tra il cerchio e la retta.

Per poter determinare la curva di lunghezza stazionaria ¹² bisogna ricorrere a principi variazionali.

Siano P e Q due punti, consideriamo l'insieme $C^2(P, Q)$ delle curve differenziabili di classe C^2 congiungenti P e Q , parametrizzate opportunamente in maniera tale che, detti $a < b$ due numeri reali, $\forall \gamma(t) \in C^2(P, Q)$, $\gamma(a) = P$ e $\gamma(b) = Q$. Consideriamo un'applicazione $\mathcal{L}(\gamma, \frac{\partial}{\partial t})$ che chiameremo **lagrangiana**, la quale, per ogni $\gamma(t) \in C^2(P, Q)$, associa la funzione di $t \in [a, b]$, $\mathcal{L}(\gamma(t), \frac{\partial}{\partial t}(t))$. La lagrangiana consente di definire un funzionale $I : C^2(P, Q) \rightarrow \mathfrak{R}$ che si chiama **azione**, mediante la legge di corrispondenza $I(\gamma) = \int_a^b \mathcal{L}(\gamma(t), \frac{\partial}{\partial t}(t)) dt$. È possibile definire mediante metodi di analisi funzionale il differenziale δI dell'azione (*differenziale di Fréchet*), quindi le curve che rendono l'azione stazionaria sono quelle che verificano l'equazione $\delta I(\gamma) = 0$.

Teorema 2.7.2 *Le curve di $C^2(P, Q)$ che rendono stazionaria l'azione: $\delta I(\gamma) = 0$, sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0, \quad (2.60)$$

dove $V^i = \frac{dx^i}{dt}$ sono le componenti di $\frac{\partial}{\partial t}$.

Senza dimostrazione.

Se supponiamo la varietà propriamente riemanniana e come lagrangiana consideriamo la funzione $\mathcal{L}(\gamma, \frac{\partial}{\partial t}) = \sqrt{\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}}$, cioè

$$\mathcal{L}(\gamma(t), \frac{\partial}{\partial t}(t)) = \sqrt{g_{ij}(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t)}, \quad (2.61)$$

dove $\frac{\partial}{\partial t}$ è il vettore tangente a γ e (x^1, x^2, \dots, x^n) è un sistema di coordinate definite da una opportuna carta locale, allora l'azione associa, ad ogni curva di $C^2(P, Q)$, la sua lunghezza.

Proposizione 2.7.2 *L'equazione (2.60) con la lagrangiana (2.61) si riduce al sistema di equazioni differenziali:*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jh} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt} = \lambda \frac{dx^i}{dt}.$$

Dimostrazione. Tutto è ricondotto a calcolare le derivate al primo membro della (2.60). •

Dalla proposizione precedente si riconosce subito che le curve di lunghezza stazionaria tra due punti sono esattamente le geodetiche.

Se la varietà non è propriamente riemanniana scegliamo come lagrangiana $\mathcal{L}(\gamma, \frac{\partial}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$, cioè

$$\mathcal{L}(\gamma(t), \frac{\partial}{\partial t}(t)) = g_{ij}(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)) \frac{dx^i}{dt}(t) \frac{dx^j}{dt}(t), \quad (2.62)$$

allora l'azione associa a ciascuna curva la sua *energia cinetica*, quindi le soluzioni delle equazioni di Eulero-Lagrange sono le curve di energia stazionaria.

Proposizione 2.7.3 *L'equazione (2.60) con la lagrangiana (2.62) si riduce al sistema di equazioni differenziali*

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jh} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^h}{dt} = 0.$$

Dimostrazione. Come quella della proposizione precedente. •

Dalla proposizione precedente si vede che, anche se la varietà è propriamente riemanniana, conviene scegliere in ogni caso la lagrangiana 2.62, perché, in questo modo, le soluzioni sono le geodetiche con un parametro affine.

Proposizione 2.7.4 *L'equazione 2.60 ammette il seguente integrale primo: $\mathcal{L} - V^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} = \text{cost}$.*

Dimostrazione. Se $(x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$ è una soluzione di (2.60), rappresentata in una carta locale, allora $V^i(t) = \frac{dx^i}{dt}(t)$ e

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} V^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} \frac{dV^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} \right) V^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} \frac{dV^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} V^i \right),$$

da cui si ottiene

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{L} - V^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i}) = 0. \quad \bullet$$

¹² minima in una varietà propriamente riemanniana, in una varietà pseudo-riemanniana può anche essere la curva di lunghezza massima, per esempio, si è visto nella prima parte, che, nello spazio-tempo di Minkowski, le traiettorie di tempo proprio ($\frac{\text{lunghezza}}{c}$) massimo tra due eventi, sono quelle rettilinee.

Applicando il risultato precedente alla lagrangiana 2.62, si trova

$$\mathcal{L} - V^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^i} = g_{ij} V^i V^j - V^i 2g_{ij} V^j = -g_{ij} V^i V^j = \text{cost},$$

si é cosí dimostrato che

Proposizione 2.7.5 *Il vettore tangente ad una geodetica con un parametro affine ha quadrato costante. In particolare quando tale costante é in valore assoluto uguale a 1, tale parametro affine si riduce all'ascissa curvilinea.*

Esempio 23 *In uno degli esempi precedenti sono state calcolati i coefficienti di Christoffel per una sfera di raggio R^2 , possiamo, quindi, utilizzarli per scrivere l'equazione delle geodetiche:*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = 0, \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} = 0.$$

Questo sistema di equazioni ammette le soluzioni $\phi(t) = \phi_0$ e $\theta(t) = \alpha t + \beta$, essendo α e β due costanti. Queste soluzioni rappresentano tutti i cerchi massimi (meridiani) uscenti dai poli. Poiché la scelta dei poli é arbitraria, tutti i cerchi massimi sono geodetiche.¹³

Esempio 24 *Per un cilindro circolare i coefficienti della connessione riemanniana sono identicamente nulli, quindi l'equazione delle geodetiche é:*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

che ammette come integrale generale $\theta(t) = \alpha t + \beta$ e $z(t) = \delta t + \mu$, essendo $\alpha, \beta, \delta, \mu \in \mathfrak{R}$. Quindi le geodetiche sul cilindro circolare sono, in generale le eliche ed in particolare le direttrici e le generatrici. Da questo si vede che il postulato delle parallele, malgrado la topologia non sia quella euclidea, é ancora valido.

Su una varietá propriamente riemanniana M_n , ad ogni coppia di punti P e Q si puó associare il numero $d(P, Q)$ definito come l'estremo inferiore delle lunghezze di tutte le curve differenziabili a tratti¹⁴ che li congiungono.¹⁵

Teorema 2.7.3 *L'applicazione $d(P, Q)$ é una distanza in M_n e la topologia che essa induce su M_n é la stessa di quella di cui M_n era dotato, cioé la varietá topologica M_n é omeomorfa allo spazio metrico M_n .*

Senza dimostrazione.

¹³per dimostrare che non ci sono altre geodetiche oltre i cerchi massimi, bisognerebbe determinare l'integrale generale, che in questo caso é determinabile, in virtú del fatto che ci sono due integrali primi, uno e quello della proposizione 2.7.4 e l'altro proviene dal fatto che la seconda equazione puó anche essere scritta nelle seguente forma: $\frac{d}{dt}(\sin^2\theta \frac{d\phi}{dt}) = 0$.

¹⁴differenziabili in tutti i punti tranne un numero finito.

¹⁵si potrebbe pensare di definire $d(P, Q)$ come la lunghezza della geodetica che li congiunge, ma questo in generale non é lecito perché non é detto che comunque si prendano due punti esista una ed una sola geodetica che li congiunge, per esempio in una sfera, il polo nord ed il polo sud sono congiunti da infinite geodetiche.

Chapter 3

RELATIVITÁ GENERALE

3.1 Assiomi della Relativitá Generale

Nel capitolo precedente, si é visto come sia possibile dare una formulazione geometrica alla teoria gravitazionale classica. Tuttavia, tale formulazione é un esercizio accademico, non fornendo nessuna previsione nuova rispetto alla teoria classica ed essendo una teoria non relativistica. Quello a cui si é veramente interessati é una teoria relativistica della gravitazione. Per fare ciò, lasciando inalterate le idee che stanno alla base di tale formulazione: *gravitá come connessione, forze mareali come tensore di curvatura*, vediamo quali modifiche devono essere fatte alle assunzioni matematiche, per ottenere una teoria relativistica della gravitazione.

Bisogna considerare una varietá differenziabile che generalizzi lo spazio-tempo di Minkowski, quindi deve avere dimensione 4 ed, in accordo con il principio di indipendenza dall'osservatore della velocitá della luce, deve essere dotata di una struttura pseudo-riemanniana di segnatura 2. Ciò vuol dire che $\forall P \in M_4$, assegnata una base ortonormale $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_3)$ di T_P , il tensore metrico ha, in T_P , la seguente espressione: $ds^2 = -\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3$. Una tale varietá pseudo-riemanniana verrá chiamata **lorentziana** o **iperbolica**.

Assioma 1 *Lo spazio-tempo M_4 é una varietá iperbolica di dimensione 4.*

L'assioma precedente dice di che tipo deve essere la geometria, ma non dice quale deve essere. Si assume che la geometria non sia unica come nella fisica classica, ma vari dinamicamente al variare della distribuzione di materia, il meccanismo che determina questa dipendenza é fornito dalle **equazioni di Einstein**, che saranno formulate nel prossimo paragrafo.

Assioma 2 *Ogni campo materiale determina, tramite le equazioni di Einstein, la struttura riemanniana dello spazio-tempo*

Come nello spazio-tempo di Minkowski, é possibile classificare, per ogni $P \in M_4$, i vettori di T_P in vettori di tipo **tempo**, di tipo **luce** o **nullo** e di tipo **spazio**. Resta quindi determinato in ciascun T_P il **cono di luce**, definito come l'insieme dei vettori di tipo nullo. A differenza, però, dello spazio tempo di Minkowski, qui il cono di luce, in generale, non é una ipersuperficie nello spazio-tempo, ma resta confinato nello spazio tangente.

Come nello spazio-tempo di Minkowski, é possibile dividere l'insieme delle curve differenziabili in curve di tipo tempo, di tipo nullo o luce, di tipo spazio ed indefinite, secondo che, il campo di vettori tangenti é costantemente di tipo tempo, di tipo luce, di tipo spazio o non é sempre dello stesso tipo.

In base alla proposizione 2.7.5 le geodetiche non sono mai indefinite, perché, preso un parametro affine, il vettore tangente ha quadrato costante e quindi non può cambiare di segno.¹

Proposizione 3.1.1 *Ogni geodetica é sempre di tipo definito.*

Nella prima parte si é visto, che una particella si muove con velocitá inferiore a quella della luce se e solo se la sua traiettoria spazio-temporale cioè la sua **linea di universo** é una curva di tipo tempo, mentre si muove con velocitá c se e solo se la sua linea di universo é una traiettoria di tipo nullo.

Assioma 3 *La linea d'universo di una particella che si muove a velocitá inferiore a quella della luce é una curva di tipo tempo, la cui ascissa curvilinea divisa per la velocitá della luce é il **tempo proprio** τ della particella e le cui **quadrivelocitá** e **quadriaccelerazioni** sono rispettivamente i vettori $V = \frac{\partial}{\partial \tau}$ e $A = \nabla_V V$. La linea di universo di una particella che si muove alla velocitá della luce é una curva di tipo nullo.*

¹il quadrato del vettore tangente, pur non essendo costante, resta dello stesso segno anche rispetto ad un parametro non affine, infatti se $\frac{\partial}{\partial t}$ é il vettore tangente rispetto al parametro affine e $V(t) = \mu(t) \frac{\partial}{\partial t}(t)$ quello rispetto ad un parametro qualunque, $V \cdot V = \mu^2 \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t}$.

In relativit  ristretta una particella non soggetta a forze ha come linea d'universo una retta di tipo tempo (nullo) e quindi una geodetica di tipo tempo (nullo) dello spazio-tempo di Minkowski.

Assioma 4 *La linea di universo di una particella libera   una geodetica di tipo tempo o di tipo nullo secondo che essa si muova ad una velocit  minore o uguale a quella della luce. Nel caso di geodetiche di tipo tempo, il tempo proprio τ   quel particolare parametro affine per cui $\frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} = -c^2$.*

Osservazione 11 *A differenza della fisica classica, dove si assume che la geometria   euclidea e la presenza di materia, genera delle forze a distanza che deviano dal loro moto rettilineo ed uniforme le particelle libere, qui si assume che la materia modifica la geometria (connessione) dello spazio tempo, quindi i moti spontanei, cio  quelli geodetici, non sono pi  moti rettilinei ed uniformi.*

Oltre a questo, non ci sono tante altre cose comuni con lo spazio-tempo di Minkowski: in generale non esistono sistemi di coordinate cartesiane e questo implica che

1. il tensore metrico non   costante rispetto a nessun sistema di coordinate;
2. la connessione non   piatta;
3. non esistono sistemi di riferimento inerziali, ma solo sistemi di riferimento in caduta libera (sistemi di coordinate normali geodetiche) che sono solo approssimativamente inerziali, quindi:
4. non ha senso parlare di trasformazioni di Lorentz.

Infine va osservato che, cos  come la connessione determina le geodetiche e quindi le traiettorie delle particelle libere, il tensore di curvatura determina le forze mareali e quindi l'accelerazione relativa tra particelle libere vicine.

Nel seguito, dove non   specificato il contrario, verranno scelte unit  di misura in maniera tale che $c = 1$. Questo, in particolare, implica che il tempo proprio τ di una particella coincide con l'ascissa curvilinea della sua linea di universo e la quadrivelocit  $\frac{\partial}{\partial \tau}$ ha modulo unitario: $\frac{\partial}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} = -1$.

3.2 Equazioni di Einstein

Si   visto nella prima parte che, un fluido relativistico   descritto da un tensore energia-impulso T^{ij} simmetrico, soggetto alla legge di evoluzione

$$\nabla_i T^{ij} = 0. \quad (3.1)$$

Poich  siamo nell'ambito di una teoria relativistica, il concetto di campo materiale   pi  ampio di quello classico: ogni campo fisico dotato di una densit  di energia, verr  inteso come campo materiale. Cos  nell'ambito dei campi materiali rientrano, oltre i fluidi, il campo elettromagnetico, il campo di neutrini etc.. Tutti questi campi, comunque, sono caratterizzati, come i fluidi, da un tensore energia impulso simmetrico e verificante l'equazione (3.1). Quindi qualunque sia il campo o i campi materiali che generano il campo gravitazionale, matematicamente essi vengono descritti da un tensore doppio simmetrico ed a divergenza nulla.

Cos  le equazioni di campo che forniscono un legame tra i campi materiali e la struttura riemanniana, dovranno essere del tipo

$$G_{ij} = kT_{ij}, \quad k \in \mathfrak{R}, \quad (3.2)$$

dove G_{ij}   un tensore geometrico da determinarsi opportunamente.

Il tensore G_{ij} , che da ora in poi chiameremo **tensore di Einstein**, pu  essere determinato imponendo le seguenti condizioni:

1. si deve annullare quando la connessione   piatta. Questo implica che tra le soluzioni nel vuoto ci deve essere lo spazio-tempo di Minkowski;
2. si deve poter costruire a partire solo dal tensore di curvatura e dal tensore metrico;
3. deve essere lineare nel tensore di curvatura;
4. deve essere simmetrico ed a divergenza nulla, dovendo, per la (3.2), essere uguale ad un tensore con queste caratteristiche.

L'equazione (2.53), valida nell'ambito classico, é concettualmente simile alla (3.2), perché a sinistra c'è un tensore geometrico ed a destra la densità di massa di un campo materiale. Si potrebbe, perciò essere tentati di generalizzare la (2.53) in ambito relativistico, ponendo $G_{ij} = R_{ij}$. Il tensore di Ricci verifica, ovviamente tutte le condizioni enunciate sopra, con l'unica eccezione dell'annullarsi della divergenza. Bisogna, quindi, verificare quanto vale $\nabla_i R^i_j = R^i_{j;i}$. Dalle identità di Bianchi (2.47)

$$R^i_{j h k ; r} + R^i_{j r h ; k} + R^i_{j k r ; h} = 0,$$

contraendo gli indici i e h e tenendo conto del fatto che la derivata covariante commuta con l'operazione di contrazione degli indici, si ottiene

$$R^i_{j k ; r} + R^i_{j r i ; k} + R^i_{j k r ; i} = 0,$$

da cui, alzando l'indice j

$$R^j_{k ; r} + R^{ij}_{r i ; k} + R^{ij}_{k r ; i} = 0,$$

per le simmetrie del tensore di curvatura

$$R^j_{k ; r} - R^{ji}_{r i ; k} + R^{ji}_{r k ; i} = 0,$$

infine, saturando gli indici j e r , si ottiene

$$R^j_{k ; j} - R^i_{i ; k} + R^i_{k ; i} = 0 \quad \Rightarrow \quad R^j_{k ; j} = \frac{1}{2} R_{; k}.$$

Quindi il tensore di Ricci non ha divergenza nulla, però dall'equazione precedente e da $g_{ij ; h} = 0$ si ricava che il tensore

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R, \tag{3.3}$$

é a divergenza nulla, oltre a godere di tutte le altre proprietà enunciate sopra. Si può dimostrare, inoltre, che il tensore (3.3) é, a meno di una costante, l'unico tensore verificante tali proprietà, quindi esso é il tensore di Einstein e le equazioni di campo che chiameremo **equazioni di Einstein** sono:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}. \tag{3.4}$$

Il tensore di Einstein dipende dal tensore metrico e dalle sue derivate prime e seconde, quindi le equazioni (3.4), una volta assegnato il campo materiale T_{ij} , definiscono un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, alle derivate parziali, nelle funzioni incognite g_{ij} . Risolte queste equazioni, resta determinata la struttura riemanniana e quindi l'unica connessione ad essa associata.

Le prime semplici soluzioni cosmologiche delle equazioni (3.4) trovate inizialmente da Friedmann avevano un andamento dinamico, cioè rappresentavano un universo in espansione. Ciò non piacque ad Einstein, perché contrastava con l'idea che si aveva a quel tempo di un universo statico ed immutabile nell'eternità. Pertanto egli pensò che tali soluzioni rappresentassero un fallimento delle sue equazioni e cercò di modificarle aggiungendo al primo membro il termine a divergenza nulla Λg_{ij} , essendo Λ una costante, chiamata **costante cosmologica**, da determinarsi opportunamente in maniera tale da ottenere soluzioni cosmologiche statiche. In questo modo le nuove equazioni di Einstein diventarono

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{ij}, \tag{3.5}$$

che sono più generali, in quanto le precedenti si ottengono per $\Lambda = 0$, ma il tensore a primo membro non verifica le condizioni che sono state imposte per determinare il tensore di Einstein, perché non si annulla quando la connessione é piatta.

Tredici anni dopo, la scoperta di Hubble dello spostamento verso il rosso dello spettro luminoso delle galassie, che veniva interpretato come una prova dell'espansione dell'universo, fu una conferma sperimentale della soluzione di Friedmann e quindi delle equazioni di Einstein nella prima forma. Da allora la costante cosmologica, definita da Einstein come il più grande errore della sua vita,² fu abbandonata. Attualmente, dalle osservazioni, si deduce che la costante cosmologica, se non é nulla é molto piccola, quindi, nel seguito, se non espressamente specificato, verranno considerate come equazioni di campo le equazioni (3.4). Comunque in tempi recenti sono state utilizzate le equazioni (3.5) per tenere conto del contributo alla gravità dell'energia quantistica del vuoto, ma in questo caso il termine Λg_{ij} é interpretato come un contributo al tensore energia-impulso, piuttosto che un termine aggiuntivo al tensore di Einstein.

Le equazioni di Einstein in assenza di campi materiali: $T_{ij} = 0$, si riducono a $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0$, da cui, alzando l'indice i , saturando con l'indice j e tenendo conto che $g^i_i = \delta^i_i = 4$, si ricava $R = 0$, quindi le equazioni di Einstein nel vuoto sono

$$R_{ij} = 0. \tag{3.6}$$

²si diede da fare per oscurare la previsione più spettacolare della sua teoria: l'espansione dell'universo.

Quest'ultima equazione, che ammette certamente come soluzione $R^i_{j\,hk} = 0$, cioè la connessione piatta, non ammette solo questa soluzione come vedremo tra breve.

Le equazioni di Einstein, sono molto difficili da integrare, ad oggi si conoscono poche soluzioni esatte, che sono state ottenute imponendo delle simmetrie molto forti in maniera da semplificare notevolmente le equazioni. Comunque quelle poche soluzioni esatte sono in grado di descrivere il campo gravitazionale di una stella o l'intero universo, facendo delle previsioni, che, dove si discostano dalle previsioni newtoniane, sono state verificate sperimentalmente.

3.3 Campo gravitazionale di una stella a simmetria sferica: spazio-tempo di Schwarzschild

3.3.1 La soluzione di Schwarzschild esterna

Onde semplificare le equazioni di campo, si consideri il caso di una stella a simmetria sferica, cioè di un corpo perfettamente sferico con distribuzione di massa, se non omogenea almeno a gusci sferici concentrici di ugual densità e priva di momento angolare³. Una tale soluzione deve essere rappresentata da un tensore metrico a simmetria sferica, cioè, denotato con t una variabile temporale e con r la variabile radiale sulle ipersuperfici $\Sigma_{t_0} = \{t = t_0\}$, allora, le superfici $r = r_0$ di Σ_{t_0} , sono sfere concentriche e quindi individuate dal tensore metrico $f(t_0, r_0)d\Omega^2$, dove $f(t, r)$ é un'opportuna funzione positiva regolare e

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$

é il tensore metrico di una sfera di raggio unitario.

Da questo segue che, le soluzioni delle equazioni di campo corrispondenti a queste assunzioni devono essere ricercate tra i tensori metrici del tipo

$$ds^2 = A(t, r)dt^2 + 2B(t, r)dtdr + C(t, r)dr^2 + f(t, r)d\Omega^2, \quad (3.7)$$

essendo $A(t, r)$, $B(t, r)$, $C(t, r)$ delle funzioni regolari, tali che la segnatura del tensore metrico é, in ogni punto, -2 .

Si puó dimostrare che con un opportuno cambiamento di coordinate⁴, il tensore metrico (3.7), puó essere diagonalizzato, in maniera tale che, denotate ancora con t e r le nuove coordinate, esso si possa scrivere nella forma

$$ds^2 = -e^{\nu(t, r)} dt^2 + e^{\lambda(t, r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.8)$$

dove gli esponenziali sono stati usati per avere la certezza che la segnatura sia -2 in ogni punto.

La stella divide lo spazio-tempo in due zone: la parte interna e quella esterna, ciascuna delle quali é rappresentata da una soluzione diversa delle equazioni di campo, perché il campo materiale interno é diverso da quello esterno. Delle due soluzioni, la piú interessante é certamente quella esterna, perché descrive il campo gravitazionale stellare. Quella interna che dipende dal particolare fluido che costituisce la stella e dalla sua equazione di stato, non verrà considerata. L'ipotesi piú semplice, per la soluzione esterna é che non ci sia campo materiale esterno: $T_{ij} = 0$. In conclusione bisogna determinare le soluzioni della tipo (3.8) delle equazioni di campo (3.6), cioè calcolare il tensore di Ricci della (3.8), eguagliarlo a zero, e determinare le soluzioni $\nu(t, r)$ e $\lambda(t, r)$ delle equazioni differenziali cosí ottenute.

Utilizzando le notazioni $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$ e $\prime = \frac{\partial}{\partial r}$, i coefficienti di Christoffel non nulli della (3.8), sono:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \dot{\nu}, & \Gamma^0_{01} &= \frac{\nu'}{2}, & \Gamma^0_{11} &= \frac{1}{2}e^{\lambda-\nu}\dot{\lambda}, & \Gamma^1_{00} &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu', & \Gamma^1_{01} &= \frac{1}{2}\dot{\lambda}, & \Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}\lambda', \\ \Gamma^1_{22} &= -re^{-\lambda}, & \Gamma^1_{33} &= \Gamma^1_{22}\sin^2\theta, & \Gamma^2_{12} &= \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, & \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\cos\theta, & \Gamma^3_{23} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \end{aligned}$$

L'unica componente non nulla del tensore di Ricci ad indici diversi é $R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}$, da cui, per le equazioni di campo (3.6), $\dot{\lambda} = 0$, quindi nelle rimanenti componenti non nulle del tensore di Ricci, si possono togliere tutti i termini in cui $\dot{\lambda}$ e $\ddot{\lambda}$ sono a fattore. Con questa premessa, le equazioni di campo (3.6), si scrivono:

$$2e^{\lambda-\nu}R_{00} = \nu'' + \frac{1}{2}\nu'(\nu' - \lambda') + \frac{2\nu'}{r} = 0, \quad (3.9)$$

$$-2R_{11} = \nu'' + \frac{1}{2}\nu'(\nu' - \lambda') - \frac{2\lambda'}{r} = 0, \quad (3.10)$$

³rotazione attorno ad un asse.

⁴la trasformazione di coordinate $t = k(t', r')$ e $r = r'$, dove $k(t', r')$ é una soluzione dell'equazione differenziale $A\frac{\partial k}{\partial r} + B = 0$, fa diventare la (3.7) diagonale, invece la trasformazione di coordinate $t' = t$ e $r' = f(t, r)$, trasforma il coefficiente di $d\Omega^2$ in r'^2 , quindi basta eseguire prima la seconda trasformazione di coordinate e poi la prima.

$$R_{22} = \frac{r}{2}(\lambda' - \nu')e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} = 0, \quad (3.11)$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (3.12)$$

Sottraendo membro a membro la seconda dalla prima si ottiene

$$\lambda' + \nu' = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu(t, r) = -\lambda(r) + f(t), \quad (3.13)$$

essendo $f(t)$ una funzione arbitraria. Sostituendo la (3.13) nella (3.11), si ottiene

$$r\lambda'e^{-\lambda} + 1 - e^{-\lambda} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{e^{-\lambda}\lambda'}{e^{-\lambda} - 1} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad -\log|e^{-\lambda} - 1| = \log r + k \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda} = 1 - \frac{h}{r} \quad h \in \mathfrak{R},^5$$

da cui si ottiene l'integrale generale

$$e^\nu = H(t)\left(1 - \frac{h}{r}\right), \quad e^\lambda = \left(1 - \frac{h}{r}\right)^{-1}, \quad \text{con } H(t) > 0.$$

La funzione arbitraria $H(t)$ é ininfluyente, infatti con la trasformazione della coordinate temporale $t' = \int \sqrt{H(t)} dt$, si ottiene $dt'^2 = H(t)dt^2$ e poiché il tempo non compare da nessun'altra parte del tensore metrico, quest'ultimo, senza perdita di generalitá, può essere scritto

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{h}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{h}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (3.14)$$

Da notare che le componenti del tensore metrico non dipendono dal tempo, in questo caso si dice che lo spazio-tempo é **statico**. La staticitá non é stata imposta in partenza, perché si sono considerate funzioni generiche di t e di r , ma é stata determinata come conseguenza delle equazioni di campo.

Per $h = 0$ si ottiene la connessione piatta: spazio-tempo di Minkowskii in coordinate spaziali sferiche, cosa che ci si doveva aspettare, perché tra le soluzioni senza campi materiali, ci deve essere in particolare lo spazio-tempo della relativitá ristretta⁶.

Per $h \neq 0$, la connessione non é piatta⁷, ma per $r \rightarrow \infty$, tende alla connessione piatta, in questo caso si dice che lo spazio-tempo é **asintoticamente piatto**.

Proposizione 3.3.1 *Le equazioni a simmetria sferica delle equazioni di campo nel vuoto (3.6), distinte dallo spazio-tempo di Minkowskii, sono statiche ed asintoticamente piatte.*

Nel tensore metrico (3.14), la costante di integrazione h viene determinata, imponendo la compatibilitá con la teoria newtoniana nel caso di campi gravitazionali deboli. Ció si realizza, imponendo che le geodetiche di tipo tempo della (3.14), per r grande (campo gravitazionale debole), corrispondano alle soluzioni della teoria di Newton. Con tale criterio, si vede che per una stella di massa M , deve essere $h = 2GM$, dove G é la costante di gravitazione universale.

In conclusione, il campo gravitazionale esterno di una stella a simmetria sferica di massa M e raggio R_0 , é determinato dal tensore metrico

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.15)$$

dove $r \in [R_0, \infty]$.

Dalla (3.15), si vede subito che il tensore metrico é, non solo degenerare, ma anche singolare nei punti $r = 0$ e nei punti della ipersuperficie $r = r_S = 2GM$.⁸ Nel seguito, tale ipersuperficie verrá chiamata **orizzonte degli eventi** ed il raggio r_S delle sfere che si ottengono intersecandola con $t = cost$, si chiamerá **raggio di Schwarzschild**.

La natura di tali punti verrá studiata piú avanti. Per ora basta dire che, per una stella ordinaria di raggio R_0 , $r_S \ll R_0$ ⁹, quindi, la soluzione esterna, che parte da $r = R_0$, non contiene tali singolaritá.

⁵il valore $h = 0$ corrisponde al caso che si é escluso quando si é diviso per $e^{-\lambda} - 1$.

⁶questa conclusione non é vera con una costante cosmologica non nulla.

⁷per esempio $R^3_{232} = 1 - e^{-\lambda} = \frac{h}{r}$.

⁸poiché $\frac{2GM}{r}$ deve avere le dimensioni di una velocitá alla -2 , in unitá di misura in cui $c \neq 1$, $r_S = \frac{2GM}{c^2}$, che, curiosamente, corrisponde, nell'ambito classico, al raggio minimo che dovrebbe avere una stella di massa M affinché la luce possa sfuggire dal suo campo gravitazionale.

⁹per esempio, per una stella della massa del Sole, $r_S \approx 3Km$ e per un pianeta della massa della Terra $r_S \approx 9mm$.

3.3.2 Orbite nello spazio-tempo di Schwarzschild

Determinato il modo in cui una stella a simmetria sferica *fa incurvare* lo spazio-tempo, determiniamo il modo in cui lo spazio tempo *fa muovere* le particelle libere. Per far ciò, bisogna determinare le soluzioni dell'equazione delle geodetiche di tipo tempo o di tipo luce.

Sarà fatta sul raggio R_0 della stella é che $R_0 > r_S$, quindi, nel seguito, verrà sempre supposto $r > r_S$.

Il parametro τ usato per le geodetiche sarà un generico parametro affine, quindi, a meno di un fattore costante, il tempo proprio della particella. La coordinata temporale t esprime, a meno di un fattore costante, il tempo proprio di un osservatore in quiete rispetto alla stella. Infatti, la linea d'universo di tale osservatore é $(t, r = r_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0)$, il quadrato del vettore tangente é $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = g_{00} = -e^{\nu(r_0)}$, quindi $\frac{\partial}{\partial \sigma} = e^{-\frac{\nu(r_0)}{2}} \frac{\partial}{\partial t}$ ha modulo unitario, ne segue che il tempo proprio é il parametro $\sigma = e^{\frac{\nu(r_0)}{2}} t$.

Tenendo conto dell'espressione dei simboli di Christoffel calcolati nel paragrafo precedente e denotato con τ un parametro affine non necessariamente coincidente con il tempo proprio, si trova:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \nu' \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} &= 0, \\ \frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 - r e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \theta}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} - \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 &= 0, \\ \frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} &= 0. \end{aligned}$$

Tenedo conto che $0 < \theta < \pi$, dalla terza si ricava la soluzione $\theta(\tau) = \frac{\pi}{2}$, questo significa che una famiglia di orbite appartiene alla sezione equatoriale $\theta = \frac{\pi}{2}$. Chiaramente, a causa della simmetria sferica, tale risultato é indipendente dalle particolari coordinate θ, ϕ : una qualunque rotazione dell'asse polare, genera delle coordinate θ', ϕ' equivalenti a quelle di partenza, per cui deve esistere una famiglia di orbite appartenenti alla sezione $\theta' = \frac{\pi}{2}$. É ben noto che, nella teoria newtoniana della gravitá, l'orbita di un punto soggetto all'attrazione gravitazionale di un centro O , appartiene ad un piano passante per O , il quale é individuato dalle condizioni iniziali. Senza perdere in generalitá, per studiare il moto, si può considerare un sistema di riferimento avente origine in O e piano del moto coincidente con il piano coordinato $z = 0$, che, introdotto un sistema di coordinate sferiche, corrisponde al piano $\theta = \frac{\pi}{2}$. Quindi il risultato trovato prima, che le orbite appartengono alle sezioni $\theta = \frac{\pi}{2}$, a meno di una rotazione dell'asse polare, é l'analogo relativistico del moto piano nella teoria classica. E, come nel caso classico, non si perde in generalitá se si studiano le orbite su una sezione $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Mettendoci in questa ipotesi, le quattro equazioni precedenti si riducono alle seguenti tre:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} + \nu' \frac{dt}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \lambda' \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r e^{-\lambda} \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\phi}{d\tau} = 0. \quad (3.18)$$

L'equazione (3.16) può essere integrata una prima volta, infatti, come si verifica facilmente, essa é equivalente $\frac{d}{d\tau} \log(e^{\nu} \frac{dt}{d\tau}) = 0$,¹⁰ da cui si ottiene l'integrale primo

$$\frac{dt}{d\tau} = c_1 e^{-\nu}.$$

Analogamente, se nell'equazione (3.18) si escludono le soluzioni costanti $\phi(\tau) = \phi_0$, la $\frac{d\phi}{d\tau}$ non può annullarsi per nessun valore di τ ,¹¹ ciò implica che la terza equazione é equivalente a $\frac{d}{d\tau} \log(r^2 |\frac{d\phi}{d\tau}|) = 0$, da cui si ottiene l'integrale primo

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{c_2}{r^2},$$

in cui, per $c_2 = 0$, rientra anche il caso $\phi(\tau) = \phi_0$.

¹⁰se in un punto fosse $\frac{dt}{d\tau} = 0$ in quel punto e quindi in tutti i punti tale geodetica dovrebbe essere di tipo spazio, quindi deve essere $\frac{dt}{d\tau} > 0$ o $\frac{dt}{d\tau} < 0$, dove il secondo caso é riconducibile al primo con un cambiamento di segno del parametro affine.

¹¹se esistesse un $\bar{\tau}$ rispetto al quale $\frac{d\phi}{d\tau}$ fosse nulla, preso tale valore del parametro come iniziale, a causa dell'unicitá della soluzione, $\frac{d\phi}{d\tau}$ si dovrebbe annullare per ogni $\tau > \bar{\tau}$.

La costante di integrazione c_1 , con la scelta del parametro affine $\tau' = c_1\tau$, viene eliminata. Nel seguito verrà denotato con τ il parametro affine che elimina la c_1 e con J la costante di integrazione nel secondo integrale primo, relativamente al nuovo parametro affine, così i due integrali primi si scrivono:

$$\frac{dt}{d\tau} = e^{-\nu}, \quad r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = J. \quad (3.19)$$

I due integrali primi esprimono rispettivamente, a meno di una costante, il legame tra il tempo proprio della particella ed il tempo proprio dell'osservatore in quiete rispetto alla stella e, l'analogo della conservazione classica del momento angolare (costanza della velocità areale) rispetto al tempo proprio della particella.

Sostituendo le (3.19) nella (3.17), si ottiene

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \frac{\lambda'}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{\nu'}{2} e^{-\nu-\lambda} - \frac{J^2}{r^3} e^{-\lambda} = 0, \quad (3.20)$$

che é del tipo $\frac{d^2r}{d\tau^2} + A(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + B(r) = 0$, la quale, come é noto, ammette l'integrale primo $\frac{1}{2}a(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V(r) = E$, con $a(r) > 0$, essendo $a(r)$ e $V(r)$ soluzioni delle equazioni $\frac{a'(r)}{2a(r)} = A(r)$ e $V'(r) = a(r)B(r)$, cioè $a(r) = \exp(2 \int A(r)dr)$ e $V(r) = \int a(r)B(r)dr$. Nel caso presente $a(r) = e^\lambda$ e $V(r) = \int (\frac{\nu'}{2}e^{-\nu} - \frac{J^2}{r^3})dr = \frac{1}{2}(\frac{J^2}{r^2} - e^{-\nu}) + c$. Quindi un integrale primo della (3.20) é

$$e^\lambda \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - e^{-\nu} = E. \quad (3.21)$$

All'integrale primo precedente si poteva arrivare direttamente senza integrazioni, infatti si é visto nel capitolo precedente che se V^i é il vettore tangente ad una geodetica, parametrizzata con un parametro affine, allora c'è sempre l'integrale primo $g_{ij}V^iV^j = E$, che nel nostro caso si scrive $E = -e^\nu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + e^\lambda \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = -e^{-\nu} + e^\lambda \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{J^2}{r^2}$. In particolare, da quest'ultima osservazione si deduce che, secondo che la geodetica é di tipo tempo o di tipo luce, deve essere $E < 0$ o $E = 0$.

Orbite di particelle di massa a riposo non nulla: caso $E < 0$

Tenendo conto delle espressioni esplicite di $\nu(r)$ e $\lambda(r)$, riportate dalla (3.15), cioè $e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{r}$, l'equazione (3.21), moltiplicata per $e^{-\lambda}$, si può scrivere

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 + \left(E - \frac{J^2}{r^2}\right)e^\nu \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 + \left(E - \frac{J^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{2GM}{r}\right),$$

da cui, posto $\bar{r} = \frac{r}{2GM} > 1$, si ottiene

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 + \left(E - \frac{J^2}{4G^2M^2\bar{r}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right) = 1 + E\left(1 - \frac{J^2}{4G^2M^2E\bar{r}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right)$$

ed infine, ponendo $\bar{J} = \frac{J}{2GM\sqrt{-E}}$, si ottiene

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 + EU_{\bar{J}}(\bar{r}) \quad \text{dove} \quad U_{\bar{J}}(\bar{r}) = \left(1 + \frac{\bar{J}^2}{\bar{r}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right). \quad (3.22)$$

Poiché il primo membro dell'equazione precedente deve essere non negativo, anche il secondo membro lo deve essere, quindi

$$U_{\bar{J}}(\bar{r}) \leq -\frac{1}{E}, \quad (3.23)$$

cosí come nel caso classico, basta studiare il *potenziale efficace* $U_{\bar{J}}(\bar{r})$, per poter fare una classificazione qualitativa delle soluzioni al variare dell'*energia* E . Studiando la funzione nell'intervallo $]1, +\infty[$, si trova

$$U_{\bar{J}}(1) = 0, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow +\infty} U_{\bar{J}}(\bar{r}) = 1, \quad U_{\bar{J}}'(1) = 0, \quad U_{\bar{J}}'(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}^4}(3\bar{J}^2 - 2\bar{J}^2\bar{r} + \bar{r}^2),$$

da cui si vede che $U_{\bar{J}}'(\bar{r}) = 0$ non ha soluzioni reali se $-\sqrt{3} < \bar{J} < \sqrt{3}$, ha una sola soluzione se $\bar{J} = \pm\sqrt{3}$ e due soluzioni distinte se $\bar{J} > \sqrt{3}$ o $\bar{J} < -\sqrt{3}$. Nella figura 3.1, é riportato il grafico di $U_{\bar{J}}(\bar{r})$ per diversi valori di \bar{J} . In particolare, se $-\sqrt{3} \leq \bar{J} \leq \sqrt{3}$ ci sono solo moti di impatto se $-\frac{1}{E} < 1$ e moti di impatto e di allontanamento (distanza dal centro crescente indefinitivamente) se $-\frac{1}{E} \geq 1$. Se invece $\bar{J} > \sqrt{3}$ o $\bar{J} < -\sqrt{3}$, allora ci sono due valori di \bar{r} : $\bar{r}_1 < \bar{r}_2$ in cui la funzione $U_{\bar{J}}(\bar{r})$ assume, rispettivamente, un massimo ed un minimo, quindi, oltre ai moti descritti precedentemente, se $U_{\bar{J}}(\bar{r}_2) < -\frac{1}{E} < \min(U_{\bar{J}}(\bar{r}_1), 1)$ la banda permessa é limitata, con estremi distinti da \bar{r}_1 e \bar{r}_2 , quindi, in corrispondenza, i moti sono legati. Altre possibili soluzioni sono due moti circolari, per $-\frac{1}{E} = U_{\bar{J}}(\bar{r}_2)$ o per $-\frac{1}{E} = U_{\bar{J}}(\bar{r}_1)$ quando inizialmente $\frac{dr}{d\tau} = 0$ e moti asintotici per $-\frac{1}{E} = U_{\bar{J}}(\bar{r}_1)$, quando inizialmente $\frac{dr}{d\tau} \neq 0$.

Riassumendo, le differenze rispetto alle soluzioni classiche sono:

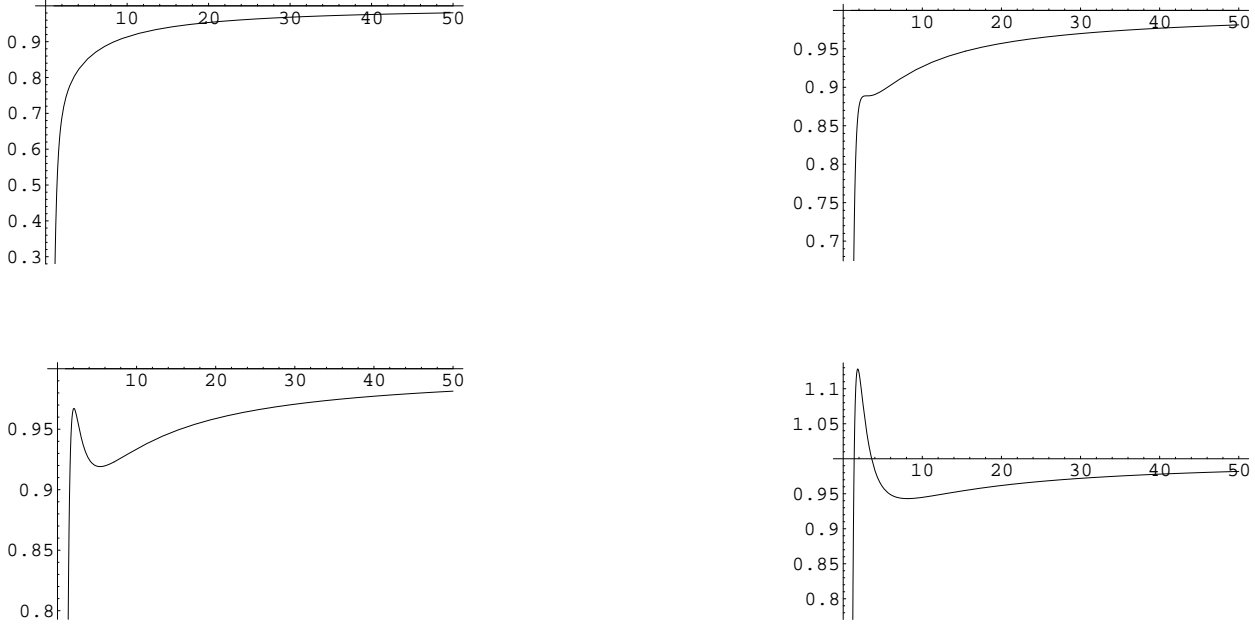


Figure 3.1: Grafico di $U_{\bar{J}}(\bar{r})$, per valori crescenti e positivi di \bar{J} dove il secondo grafico corrisponde al valore critico $\bar{J} = \sqrt{3}$

1. la particella può raggiungere l'orizzonte degli eventi ($\bar{r} = 1$) per ogni valore di \bar{J} , mentre nel caso classico, il centro è raggiungibile solo quando il momento angolare è nullo;¹²
2. nel caso classico, se il momento angolare è non nullo, i moti legati esistono sempre, mentre nel nostro caso i moti legati esistono solo quando $\bar{J} > \sqrt{3}$ o $\bar{J} < -\sqrt{3}$;
3. c'è un secondo moto circolare (instabile) ed un moto asintotico dovuti alla presenza del massimo, che nel caso classico non esistono.

Qui però occorre precisare che le soluzioni, nel caso di una stella di raggio R_0 , vanno considerate nell'intervallo $]R_0, +\infty[$. Se \bar{J} è tale che il massimo non esiste o pur esistendo si abbia $\bar{r}_1 < \bar{R}_0 = \frac{R_0}{2GM}$, allora nell'intervallo $]\bar{R}_0, +\infty[$ non c'è nessun massimo e il potenziale efficace ha lo stesso andamento di quello classico anch'esso tagliato per $r < R_0$, quindi la discussione qualitativa è identica.

La discussione qualitativa dá risultati molto generici, per esempio, se il moto è legato, l'unica informazione disponibile è che la variabile radiale può oscillare tra un valore minimo ed uno massimo, esattamente come avviene nella teoria classica per i moti legati. Però nel caso classico, grazie all'equazione di Binêt, si può conoscere la traiettoria ed è ben noto che il moto legato è un'ellisse. Per vedere quali sono le traiettorie nel caso relativistico bisogna determinare una analoga equazione in cui la funzione incognita è $r(\phi)$. Per far ciò, dalle (3.19), si ricava

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2} = \frac{\sqrt{-E}\bar{J}}{2GM\bar{r}^2},$$

da cui

$$\frac{dr}{d\tau} = 2GM \frac{d\bar{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \sqrt{-E} \frac{\bar{J}}{\bar{r}^2} \frac{d\bar{r}}{d\phi},$$

che sostituita nella (3.22) dá

$$-E \frac{\bar{J}^2}{r^4} \left(\frac{d\bar{r}}{d\phi} \right)^2 = 1 + E \left(1 + \frac{\bar{J}^2}{\bar{r}^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\bar{r}} \right).$$

Ponendo $u = \frac{1}{\bar{r}}$ e tenendo conto che $\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{\bar{r}^2} \frac{d\bar{r}}{d\phi}$, si ottiene

$$-E \bar{J}^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = 1 + E(1 + \bar{J}^2 u^2)(1 - u),$$

¹²si ricorda che, nel caso classico, se il momento angolare è non nullo, il potenziale efficace tende a $+\infty$ per $r \rightarrow 0+$.

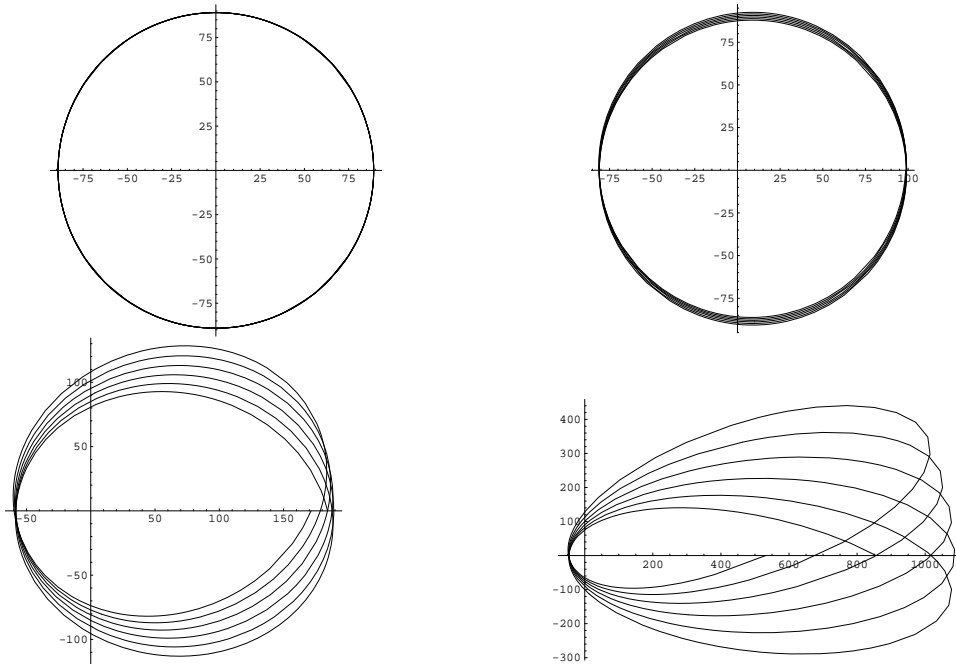


Figure 3.2: Orbite legate con condizioni iniziali $u(0) = u_0$ e $\frac{du}{d\phi}(0) = 0$, con quattro valori decrescenti di u_0 .

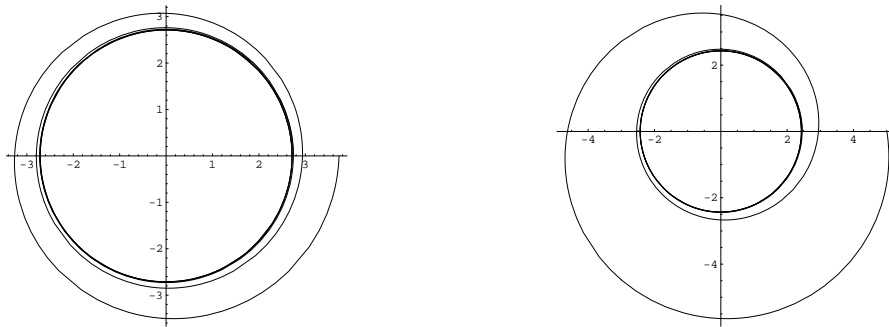


Figure 3.3: Orbite asintotiche attorno all'orbita circolare instabile.

da cui derivando rispetto a ϕ

$$-2\bar{J}^2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} = (-1 + 2\bar{J}^2 u - 3\bar{J}^2 u^2) \frac{du}{d\phi},$$

escludendo il caso in cui u é una funzione costante di ϕ , corrispondente ai moti circolari, l'equazione precedente, diventa

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = \frac{1}{2\bar{J}^2} - u + \frac{3}{2}u^2, \quad (3.24)$$

che é l'analogo relativistico della formula di Binét e differisce da quest'ultima per il termine di anarmonicita $-\frac{3}{2}u^2$. Nel caso di traiettorie lontane dal centro (r grande), u é piccolo, il termine al quadrato é trascurabile rispetto al termine lineare e si riottiene, come approssimazione, l'equazione di Binét. Ci si aspetta, quindi di trovare, per r grande, le stesse orbite della teoria classica e per r piccolo, dove il termine al quadrato non é piú trascurabile, delle difformita.

L'equazione (3.24) é stata integrata numericamente, fissando $\bar{J} = 3$ e per r_0 iniziale sempre piú grande, ottenendo, dopo alcuni giri completi, le orbite riportate nella fig.3.2. Le figure mostrano che in corrispondenza del minimo, l'orbita é una circonferenza, come nel caso classico, ma quando r_0 cresce si ha uno spostamento del perielio dell'orbita che diventa sempre piú accentuato.

Tale precessione del perielio dell'orbita di Mercurio, fu osservato prima della formulazione della teoria generale della relativita. Allora, per spiegare tale moto, nell'ambito della teoria classica, si assunse l'esistenza di un ulteriore pianeta interno, non visibile perché troppo vicino al Sole, il cui campo gravitazionale perturbava l'orbita di Mercurio. Invece la teoria della gravitazione di Einstein prevede tale precessione senza dover assumere cause di perturbazione occulte.

La precessione del perielio di Mercurio fu la prima conferma sperimentale della relativita generale. Le teorie classica e relativistica, che sono in accordo per campi gravitazionali deboli, fanno delle previsioni differenti per campi gravitazionali

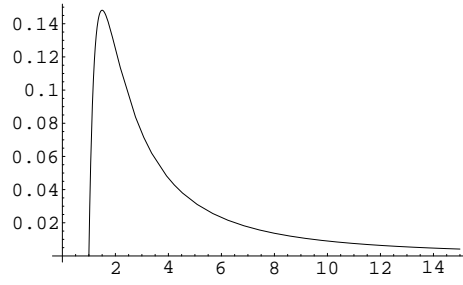


Figure 3.4: Grafico della funzione $U(\bar{r})$.

intensi e i risultati sperimentali sono in accordo con le previsioni della relatività generale.

Orbite di particelle di massa a riposo nulla: caso $E = 0$

L'equazione (3.21) per $E = 0$, diventa

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{J^2}{r^2}\left(1 - \frac{2Gm}{r}\right),$$

che, posto $\bar{r} = \frac{r}{2GM}$ e $\bar{J} = \frac{J}{2GM}$, si può anche scrivere

$$\left(\frac{d\bar{r}}{d\tau}\right)^2 = 1 - \bar{J}^2 U(\bar{r}) \quad \text{dove} \quad U(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right). \quad (3.25)$$

Se $\bar{J} = 0$, si trova immediatamente la soluzione: $\phi(\tau) = \phi_0$, $r(\tau) = \pm\tau$ e $t(\tau)$ viene determinato con una semplice integrazione. Nel caso $\bar{J} \neq 0$, tenendo conto che il primo membro della (3.25) deve essere non negativo, allora lo deve essere anche il secondo membro, quindi

$$U(\bar{r}) \leq \frac{1}{\bar{J}^2}. \quad (3.26)$$

Studiando l'andamento della funzione $U(\bar{r})$, si può fare una classificazione delle soluzioni:

$$U(1) = 0, \quad \lim_{\bar{r} \rightarrow +\infty} U(\bar{r}) = 0+, \quad U'(\bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}^4}(3 - 2\bar{r}),$$

in $\bar{r} = \frac{3}{2}$, c'è un massimo.

Dall'andamento di $U(\bar{r})$, rappresentato nella fig. 3.4, si vede che se $\frac{1}{\bar{J}^2} > U(\frac{3}{2})$, non ci sono limiti per \bar{r} , quindi la particella si allontana indefinitamente o cade sulla stella. Se $\frac{1}{\bar{J}^2} = U(\frac{3}{2})$ e inizialmente la particella si trova in $\bar{r} = \frac{3}{2}$, la traiettoria è una circonferenza, se inizialmente $\bar{r} > \frac{3}{2}$, la particella sfugge al campo gravitazionale o la sua traiettoria tende asintoticamente alla circonferenza $\bar{r} = \frac{3}{2}$ se inizialmente $\bar{r} < \frac{3}{2}$, la particella cade sulla stella o, come prima, tende asintoticamente alla circonferenza $\bar{r} = \frac{3}{2}$. Se $\frac{1}{\bar{J}^2} < U(\frac{3}{2})$, o la particella cade sulla stella o sfugge al suo campo gravitazionale.

La presenza di orbite circolari, anche se instabili, per un fotone, è un fenomeno curioso. Prima di tutto, poiché $\bar{r} = 1$ corrisponde al raggio di Schwarzschild, tali orbite hanno un raggio pari ad una volta e mezzo il raggio di Schwarzschild. Un osservatore che si trovasse a tale distanza, ammesso che la stella abbia un raggio così piccolo da rendere ciò possibile, avrebbe la possibilità di guardarsi la nuca senza dover fare ricorso a specchi.

Anche nel caso di particelle di massa nulla è possibile determinare l'equazione differenziale della traiettoria, utilizzando lo stesso procedimento già visto nel paragrafo precedente. Dalle (3.19), si ricava

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{J}{r^2} = \frac{\bar{J}}{2GM\bar{r}^2},$$

da cui

$$\frac{dr}{d\tau} = 2GM \frac{d\bar{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{\bar{J}}{\bar{r}^2} \frac{d\bar{r}}{d\phi},$$

che sostituita nella (3.25) dá

$$\frac{\bar{J}^2}{\bar{r}^4} \left(\frac{d\bar{r}}{d\phi}\right)^2 = 1 - \frac{\bar{J}^2}{\bar{r}^2} \left(1 - \frac{1}{\bar{r}}\right).$$

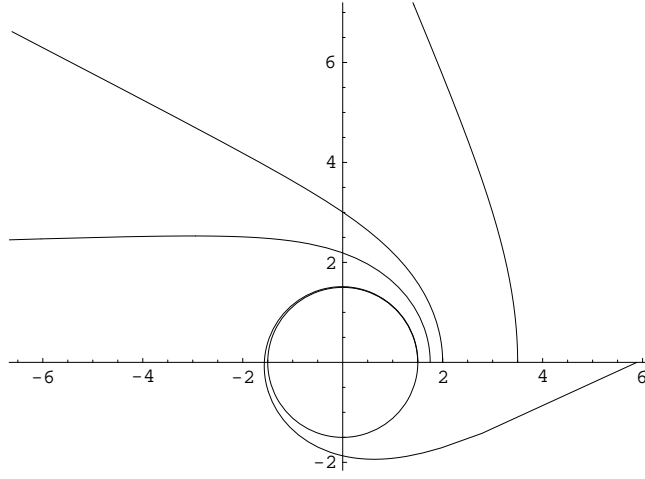


Figure 3.5: Traiettorie di particelle di massa nulla per $\frac{du}{d\phi}(0) = 0$ e diversi valori di $u(0)$.

Ponendo $u = \frac{1}{r}$ e tenendo conto che $\frac{du}{d\phi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi}$, si ottiene

$$\bar{J}^2 \left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = 1 - \bar{J}^2 u^2 (1 - u),$$

da cui derivando rispetto a ϕ

$$2\bar{J}^2 \frac{du}{d\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2} = -\bar{J}^2 (2u - 3u^2) \frac{du}{d\phi}.$$

escludendo il caso in cui u é una funzione costante di ϕ , corrispondente al moto circolare e il caso $J = 0$, che, come si é visto prima, si puó integrare banalmente, l'equazione precedente, diventa

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} = -u + \frac{3}{2}u^2. \quad (3.27)$$

Alcune soluzioni numeriche di tale equazione sono riportate nella fig. 3.5.

Traiettorie che attraversano l'orizzonte degli eventi

La discussione fatta nelle sezioni precedenti é stata fatta nella componente connessa $r > r_S$ dello spazio-tempo di Schwarzschild e si é visto che le particelle in caduta libera, se non hanno una traiettoria legata, possono arrivare fino all'orizzonte degli eventi. Per semplicitá consideriamo il caso $J = 0$, cioé ci mettiamo nell'ipotesi che il moto della particella é radiale. In questo caso l'equazione (3.21) diventa

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 = 1 + E \left(1 - \frac{2GM}{r} \right),$$

da cui, tenendo conto che si stanno considerando traiettorie di particelle che cadono, si trova

$$\frac{dr}{d\tau} = - \frac{\sqrt{r + E(r - 2GM)}}{\sqrt{r}}.$$

Se per $\tau = \tau_0$, la particella si trova in $r = r_0 > r_S$, e tocca l'orizzonte degli eventi per $\tau = \tau_1$, allora

$$\tau_1 - \tau_0 = \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau = \int_{r_0}^{r_S} \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r + E(r - 2GM)}} dr. \quad (3.28)$$

Poiché la funzione integranda al secondo membro é continua in $r = r_S$, ne segue che la geodetica tocca l'orizzonte per un valore finito del parametro affine. Ció é vero in entrambi i casi $E < 0$ e $E = 0$, ma, in particolare, nel primo caso, il parametro affine é, a meno di un fattore costante il tempo proprio della particella, questo significa che la particella arriva sull'orizzonte in un tempo finito, quindi, se non vi sono impedimenti di natura geometrica e nel paragrafo successivo vedremo che non ce ne sono, lo puó attraversare.

Il discorso é diverso se si calcola il tempo coordinato t che occorre per raggiungere l'orizzonte. Infatti per la (3.19), si trova

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = - \left(1 - \frac{2MG}{r} \right) \frac{\sqrt{r + E(r - 2GM)}}{\sqrt{r}},$$

quindi denotate con t_0 e t_1 le coordinate temporali della particella, quando le sue coordinate radiali sono rispettivamente r_0 e r_S , allora

$$t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt = - \int_{r_0}^{r_S} \frac{r\sqrt{r}}{(r - 2GM)\sqrt{r + E(r - 2GM)}} dr.$$

La funzione integranda al secondo membro diverge per $r = 2GM$, e l'integrale tende a $-\infty$ come il $\log(r - 2GM)$, come mostra una semplice integrazione per parti. Quindi l'intervallo $t_1 - t_0$ non é limitato, perciò la particella arriva sull'orizzonte per $t \rightarrow +\infty$.

In particolare, poiché il tempo proprio di un osservatore in quiete rispetto alla stella é proporzionale al tempo coordinato, ne segue che per tale osservatore passerá un tempo infinito prima che la particella arrivi sull'orizzonte, cioè vedrá avvicinarsi asintoticamente la particella all'orizzonte.

3.3.3 Le singolaritá della soluzione di Schwarzschild.

Come si é visto precedentemente, la metrica di Schwarzschild (3.15) é singolare nel punto $r = 0$ e sulla sfera $r = r_S$. Nei paragrafi precedenti, non se n'é tenuto conto, perché si é supposto il raggio della stella che determina il campo gravitazionale, maggiore di r_S . Quando, però, una stella esaurisce il suo combustibile e viene a mancare la pressione interna, essa comincia a collassare. Tale collasso gravitazionale, che, nel caso di stelle piccole, può arrestarsi ad un certo stadio, per stelle di massa superiore ad una massa critica che é dell'ordine di 2 masse solari, continua senza limite. In una situazione di questo genere, compaiono le singolaritá citate sopra.

Una singolaritá del tensore metrico può essere di due tipi: o dipendente dal sistema di coordinate ed in quanto tale eliminabile con un opportuno cambiamento di coordinate o é una singolaritá della geometria. Per poter fare rigorosamente questa distinzione, occorre dare una definizione generale di singolaritá geometrica. Tale definizione generale non esiste, però esistono dei criteri per vedere se una singolaritá porta a delle patologie geometriche che poi fisicamente si traducono in qualcosa che va oltre la comune capacità di comprensione. Per esempio, si può controllare se su una singolaritá il tensore di curvatura é divergente. Tale criterio non si basa, ovviamente sull'analisi delle singole componenti del tensore di curvatura, che dipendono dal sistema di coordinate, ma sull'analisi di invarianti costruiti a partire dal tensore di curvatura. Per esempio la funzione $R^{ijhk}R_{ijhk}$, per il criterio di tensorialitá, é un invariante e, nel caso della soluzione di Schwarzschild, diverge come r^{-6} per $r \rightarrow 0$, quindi, in base a tale criterio, il punto $r = 0$ é una singolaritá geometrica. Il divergere del tensore di curvatura, si traduce fisicamente nel fatto che le forze mareali, che da esso dipendono linearmente, tra punti vicini in caduta libera in $r = 0$, crescono senza fine. Quindi, per il malcapitato osservatore che cade in $r = 0$, nessuna forza sarebbe in grado di tenere aggregate le particelle di cui é composto. Si può anche verificare che ci sono singolaritá di natura geometrica, quando lo spazio-tempo non é **geodeticamente completo**, cioè se esistono geodetiche di tipo tempo che non possono piú essere continuate oltre un dato valore del parametro affine. Una situazione di questo genere porta alla conclusione che, la particella che segue tale geodetica, troverá il bordo dello spazio¹³ e la fine del tempo, perché il parametro affine é a meno di un fattore il tempo proprio dell'osservatore. La funzione integranda nella (3.28) é continua anche per $r=0$, quindi la particella che cade nela singolaritá $r = 0$, vi arriva in un tempo proprio finito. Quindi lo spazio-tempo di Schwarzschild non é geodeticamente completo in $r = 0$.

Si é visto che $r = 0$ costituisce una singolaritá geometrica, altrettanto non si può dire per i punti dell'orizzonte degli eventi. Infatti non ci sono invarianti costruiti a partire dal tensore di curvatura che divergono per $r \rightarrow r_S$ ed inoltre si può verificare direttamente che tale singolaritá del tensore metrico sono eliminabili con un cambiamento di coordinate.

Prima di vedere ciò, chiariamo il concetto con degli esempi. Consideriamo lo spazio-tempo:

$$ds^2 = -\frac{1}{t^4}dt^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.29)$$

tale tensore metrico é singolare per $t = 0$ ed é definito nelle due componenti connesse $t < 0$ e $t > 0$. Tutto ciò però non rappresenta niente di concreto per quanto riguarda la topologia e la connessione dello spazio-tempo, infatti tale singolaritá dipende dal particolare sistema di coordinate scelto: la trasformazione $t' = \frac{1}{t}$ trasforma la (3.29) in

$$ds^2 = -dt'^2 + dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

che, come é ben noto, é lo spazio-tempo di Minkowskii.

Un'altro esempio é lo spazio-tempo di Rindler:

$$ds^2 = -x^2dt^2 + dx^2 \quad -\infty < t < \infty, 0 < x < \infty. \quad (3.30)$$

In questo caso, per $x = 0$, la metrica é degenera e quindi la sua inversa é singolare, ma come si verifica immediatamente $x = 0$ non é una singolaritá geometrica, infatti, facendo i calcoli si vede che non solo non é possibile costruire mediante il tensore di curvatura, un invariante divergente per $x \rightarrow 0$, ma addirittura il tensore di curvatura é identicamente nullo. Ciò

¹³la paura di venirsi a trovare in una tale situazione, impedí, per molto tempo, ai navigatori di spingersi oltre le colonne d'Ercole

vuol dire che lo spazio-tempo (3.30) é una parte o tutto lo spazio-tempo di Minkowskii bidimensionale. Per eliminare la singolarit , passiamo dalla coordinata temporale t e spaziale x a coordinate di tipo nullo.¹⁴ Una curva é di tipo nullo se, indicato con $\mathbf{k} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x}$ il vettore tangente, si ha $0 = g_{ij} \mathbf{k}^i \mathbf{k}^j = -x^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2$, da cui eliminando il parametro τ , si ricava $\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$, da cui $t = \pm \log x + cost$, quindi, i parametri

$$u = t - \log x, \quad v = t + \log x \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{u+v}{2}, \quad x = \exp \frac{v-u}{2} \quad (3.31)$$

sono le coordinate nulle cercate, infatti per $u = cost$ o per $v = cost$, si ottengono le curve di tipo nullo. Nelle nuove coordinate il tensore (3.30) diventa

$$ds^2 = -e^{v-u} dudv, \quad (3.32)$$

da cui si vede, in altro modo, perch  le coordinate u e v sono nulle, infatti $\frac{\partial}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} = g_{00} = 0$ e $\frac{\partial}{\partial v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} = g_{11} = 0$.

Il tensore metrico (3.32), é definito per $-\infty < u < \infty$ e $-\infty < v < \infty$ senza nessuna singolarit , ma non estende lo spazio-tempo di Rindler su $x = 0$, perch  per tale valore di x , le nuove variabili non assumono valori finiti. L'ulteriore trasformazione di coordinate $U = -e^{-u} < 0$ e $V = e^v > 0$, trasforma la (3.32) nella

$$ds^2 = -dUdV. \quad (3.33)$$

La (3.33), oltre ad essere pi  semplice della (3.32), é equivalente a quest'ultima per $U < 0$ e per $V > 0$. Nessuno ci impedisce, perch , di considerare la (3.33) per $-\infty < U < \infty$ e $-\infty < V < \infty$ che é un'estensione della (3.32) e quindi della (3.30), e contiene $x = 0 \Leftrightarrow (u \rightarrow +\infty, v \rightarrow -\infty) \Leftrightarrow (U = 0, V = 0)$. Quindi dopo questi cambiamenti di coordinate la metrica di Rindler é stata estesa, in maniera da contenere i punti singolari della metrica originaria, come punti non singolari.

Infine la trasformazione di coordinate $T = (U+V)/2$, $X = (V-U)/2$, trasforma la (3.33) nella metrica di Minkowskii bidimensionale

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2, \quad -\infty < T < \infty, \quad -\infty < X < \infty. \quad (3.34)$$

Si pu  concludere dicendo che lo spazio-tempo di Rindler é una porzione dello spazio-tempo di Minkowskii e che i suoi punti singolari $x = 0$, non sono singolarit  geometriche, perch  nelle coordinate (T, X) , il tensore metrico, in essi non é degenerare. Tale relazione pu  essere meglio visualizzata, scrivendo il legame esistente tra le coordinate di Rindler (t, x) e le coordinate di Minkowskii (T, X)

$$t = \tanh^{-1} \frac{T}{X}, \quad x = \sqrt{X^2 - T^2}, \quad X > 0, \quad -X < T < X, \quad (3.35)$$

dedotto dalla composizione delle precedenti trasformazioni di coordinate. Nella fig. 3.6, si vede che, per la (3.35), lo spazio-tempo di Rindler corrisponde alla zona I dello spazio-tempo di Minkowskii ed é delimitato dalle rette $X = \pm T$. In tale zona le linee coordinate $t = cost$ e $x = cost$, sono, rispettivamente, le semirette uscenti dall'origine ed i rami di iperboli equilateri aventi come asintoti le rette $X = \pm T$.

Nella prima parte sono state introdotte coordinate accelerate nello spazio-tempo di Minkowskii, quello che allora si é ottenuto, é stato, sia per quanto riguarda la trasformazione di coordinate che per quanto riguarda il tensore metrico e a meno di cambiamenti di unit  di misura, esattamente lo spazio-tempo di Rindler. Le linee (di tipo tempo) γ_{x_0} , di equazione $x = x_0 > 0$, rappresentano le linee d'universo di osservatori uniformemente accelerati (modulo della quadriaccelerazione costante). Calcoliamo il modulo della quadriaccelerazione di tali osservatori:

1. vettore tangente: $V = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, 0, 0)$,
2. tempo proprio: $d\tau = \sqrt{|g_{ij} V^i V^j|} dt = \sqrt{|g_{00}|} dt = x dt \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = x_0^{-1}$,
3. quadrivelocit : $U = \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} = x_0^{-1} \frac{\partial}{\partial t} = (x_0^{-1}, 0, 0, 0)$,
4. quadriaccelerazione: $A = \nabla_U U \Rightarrow A^i = U^i (\partial_i U^j + \Gamma^j_{ih} U^h) = x_0^{-1} \frac{\partial U^j}{\partial t} + \Gamma^j_{00} x_0^{-2} = (0, x_0^{-1}, 0, 0)$, essendo l'ultima eguaglianza conseguenza di: $\frac{\partial U^0}{\partial t} = \frac{\partial U^1}{\partial t} = 0$ e $\Gamma^0_{00} = 0$, $\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} \partial_1 g_{00} = x_0$,
5. modulo della quadriaccelerazione: $|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{(A^1)^2} = x_0^{-1}$.

In conclusione, pi  piccolo é x_0 , pi  grande é la quadriaccelerazione e al tendere di x_0 a 0, essa tende a $+\infty$. Cosa che ci si poteva aspettare guardando la fig. 3.6, infatti le linee $x = x_0$ sono delle iperboli, che, quando $x_0 \rightarrow 0$, tendono al cono di luce ed é ben noto che per portare una particella materiale alla velocit  della luce occorre un'accelerazione infinita.

¹⁴Una coordinata si dice temporale(spaziale, nulla) quando le linee coordinate corrispondenti sono curve di tipo tempo(spazio, nullo), cio  quando il vettore della base naturale ad essa associata é un vettore di tipo tempo (spazio, nullo), cos , per esempio le linee coordinate corrispondenti a t sono di tipo tempo, perch  $\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial t} = g_{00} = -x^2 < 0$.

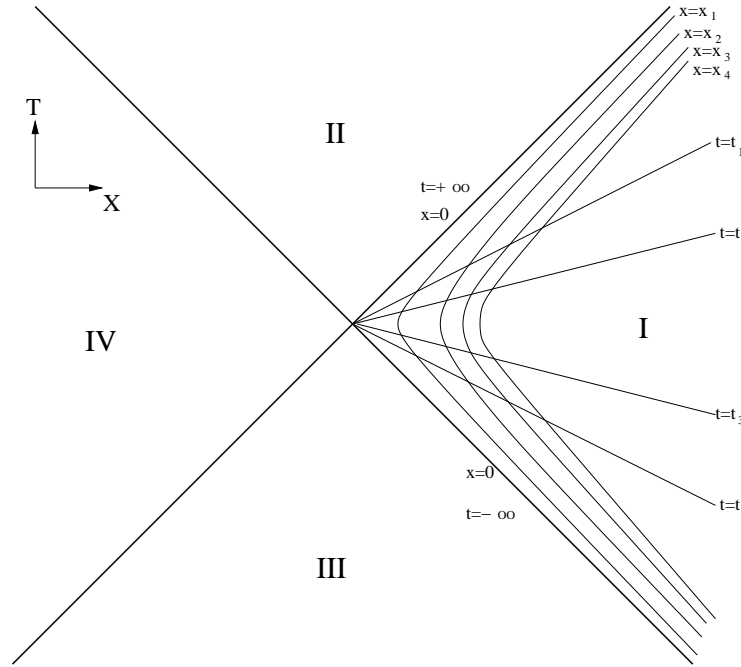


Figure 3.6: Spazio-tempo di Minkowski come estensione dello spazio-tempo di Rindler (zona I)

Nello spazio-tempo di Schwarzschild si può fare un ragionamento analogo. Le linee d'universo degli osservatori fermi rispetto alla stella (o comunque alla sorgente puntiforme del campo gravitazionale), hanno equazione $r = r_0$, $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$. Tali osservatori sono accelerati, perché non essendo il loro moto geodetico, la loro quadriaccelerazione è non nulla. Si è già visto che, per questi osservatori il tempo proprio è $\sigma = e^{\frac{\nu(r_0)}{2}} t$ e la quadrivelocità $U = \frac{\partial}{\partial \sigma} = e^{-\frac{\nu(r_0)}{2}} \frac{\partial}{\partial t}$, quindi la quadriaccelerazione è: $A = \nabla_U U \Rightarrow A^i = U^i (\partial_i U^j + \Gamma^j_{ih} U^h) = e^{-\frac{\nu(r_0)}{2}} \frac{\partial U^j}{\partial t} + \Gamma^j_{00} e^{-\nu(r_0)} \Rightarrow A^0 = A^2 = A^3 = 0, A^1 = \Gamma^1_{00} e^{-\nu(r_0)} = \frac{1}{2} e^{\nu(r_0)} \nu'(r_0) = \frac{1}{2} \frac{de^\nu}{dr}(r_0) = \frac{GM}{r_0^2}$, da cui $|A| = \sqrt{A \cdot A} = \sqrt{g_{11} (A^1)^2} = (1 - \frac{2GM}{r_0})^{-\frac{1}{2}} \frac{GM}{r_0^2}$.

Osservazione 12 *L'accelerazione degli osservatori in quiete rispetto alla stella è nel limite classico, l'accelerazione di gravità. Infatti, classicamente, da $mg = \frac{GMm}{r_0^2}$ ¹⁵, semplificando la massa inerziale con la massa gravitazionale, si ottiene $g = \frac{GM}{r_0^2}$, che è quanto trovato nel caso relativistico se $r_0 \gg r_S$. Comunque l'eguaglianza è solo numerica, perché nelle due teorie queste accelerazioni hanno significato diverso: classicamente l'accelerazione di gravità è l'accelerazione a cui è soggetto un punto sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale, in relatività generale è dovuta al fatto che il moto non è quello spontaneo (geodetico) in uno spazio-tempo curvo. Detto in altri termini, classicamente il peso ha il significato di forza attiva (eventualmente corretta dalle forze di trascinamento dovute alla rotazione), in relatività generale ha il significato di forza apparente.*

Dal risultato precedente si vede che la quadriaccelerazione è tanto più grande, quanto r_0 è piccolo, in particolare, quando $r_0 \rightarrow r_S$, $|A| \rightarrow +\infty$, cioè è necessaria un'accelerazione infinita per poter stare in quiete (rispetto al campo gravitazionale) sull'orizzonte degli eventi.

Tale situazione è simile a quella dello spazio-tempo di Rindler e, se si tiene conto che dopo la trasformazione di coordinate $y = x^2$, la metrica (3.30), assume la forma $ds^2 = -y dt^2 + \frac{1}{4y} dy^2$, si può pensare che le singolarità sull'orizzonte degli eventi per la metrica di Schwarzschild, siano della stessa natura della singolarità $x = 0$ per la metrica di Rindler e che quindi si possa operare un cambiamento di coordinate simile al precedente, che estenda la soluzione ed elimini le singolarità.

A causa della simmetria sferica dello spazio-tempo di Schwarzschild, solo i primi due addendi della metrica sono importanti per analizzare la natura delle singolarità in $r = r_S$. Quindi nel seguito verrà considerata la metrica bidimensionale

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad r > r_S \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.36)$$

Praticamente si passa dallo spazio-tempo (3.36) allo spazio-tempo (3.15) sostituendo ad ogni punto di coordinate (t_0, r_0) , la sfera di centro il punto $(t_0, 0)$ e raggio r_0 .

¹⁵poiché siamo in ipotesi di simmetria sferica, si sta supponendo la rotazione della stella attorno ad un suo asse nulla o trascurabile.

Come prima cosa si introducono coordinate di tipo nullo. Per far ciò, si osserva che $(t(\tau), r(\tau))$ sono le equazioni parametriche di una curva di tipo nullo se e solo se il suo vettore tangente $k = \frac{dt}{d\tau} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dr}{d\tau} \frac{\partial}{\partial r}$ verifica l'equazione

$$0 = g_{ij} k^i k^j = -(1 - \frac{2GM}{r}) (\frac{dt}{d\tau})^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1} (\frac{dr}{d\tau})^2,$$

che é equivalente all'equazione differenziale

$$(\frac{dt}{dr})^2 = (1 - \frac{2GM}{r})^{-2} \Leftrightarrow \frac{dt}{dr} = \pm \frac{r}{r - 2GM},$$

che si integra immediatamente:

$$t = \pm r_* + cost, \quad \text{dove} \quad r_* = r + 2GM \log(\frac{r}{2GM} - 1), \quad (3.37)$$

con $\frac{dr_*}{dr} = (1 - \frac{2GM}{r})^{-1}$. Quindi le coordinate di tipo nullo sono:

$$u = t - r_*, \quad v = t + r_* \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{u + v}{2}, \quad r_* = \frac{v - u}{2}, \quad (3.38)$$

da cui si trova

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r}) \frac{1}{4} (du + dv)^2 + (1 - \frac{2GM}{r})^{-1} \frac{1}{4} (dv - du)^2 (\frac{dr}{dr_*})^2,$$

ed infine

$$ds^2 = -(1 - \frac{2GM}{r}) dudv, \quad (3.39)$$

dove r é definito implicitamente dall'equazione

$$r + 2GM \log(\frac{r}{2GM} - 1) = \frac{v - u}{2}.$$

Dividendo ambo i membri di quest'ultima equazione per $2GM$ e passando agli esponenziali, si trova

$$e^{\frac{r}{2GM}} (\frac{r}{2GM} - 1) = e^{\frac{v-u}{4GM}} \Rightarrow \frac{r}{2GM} (1 - \frac{2GM}{r}) = e^{-\frac{r}{2GM}} e^{\frac{v-u}{4GM}},$$

quindi la (3.39) si può anche scrivere

$$ds^2 = -\frac{2GM}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} e^{\frac{v-u}{4GM}} dudv, \quad (3.40)$$

in questo modo si fattorizzato il coefficiente degenerare $1 - \frac{2GM}{r}$ della (3.39) in un fattore non degenerare: $\frac{2GM}{r} e^{-\frac{r}{2GM}}$ ed in uno degenerare: $e^{\frac{v-u}{4GM}}$. A questo punto per analogia con il caso di Rindler, la trasformazione di coordinate

$$U = -e^{-\frac{u}{4GM}} < 0, \quad V = e^{\frac{v}{4GM}} > 0, \quad (3.41)$$

trasforma la (3.40) nella

$$ds^2 = -\frac{32G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} dU dV, \quad U < 0, \quad V > 0. \quad (3.42)$$

A questo punto la metrica precedente, può essere estesa in maniera regolare a $-\infty < U < \infty, -\infty < V < \infty$, comprendendo anche $r = r_S$, che nelle coordinate (U, V) , corrisponde a $U = 0, V = 0$. Quest'ultima é conseguenza del fatto che per la (3.37), per $r \rightarrow r_S, r^* \rightarrow -\infty$ e quindi per la (3.38), $u \rightarrow +\infty, v \rightarrow -\infty$, da cui $U \rightarrow 0, V \rightarrow 0$.

A questo punto basta passare da coordinate nulle (U, V) a coordinate temporali e spaziali (T, X) , con la solita trasformazione di coordinate $T = \frac{U+V}{2}, X = \frac{V-U}{2}$, per ottenere

$$ds^2 = -\frac{32G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dT^2 + dX^2)$$

e quindi la metrica completa di Schwarzschild nelle coordinate trovate da Kruskal

$$ds^2 = -\frac{32G^3 M^3}{r} e^{-\frac{r}{2GM}} (-dT^2 + dX^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (3.43)$$

dove r é una funzione di (T, X) definita implicitamente dall'equazione

$$e^{\frac{r}{2GM}} (\frac{r}{2GM} - 1) = -e^{\frac{v-u}{4GM}} = -UV = X^2 - T^2, \quad (3.44)$$

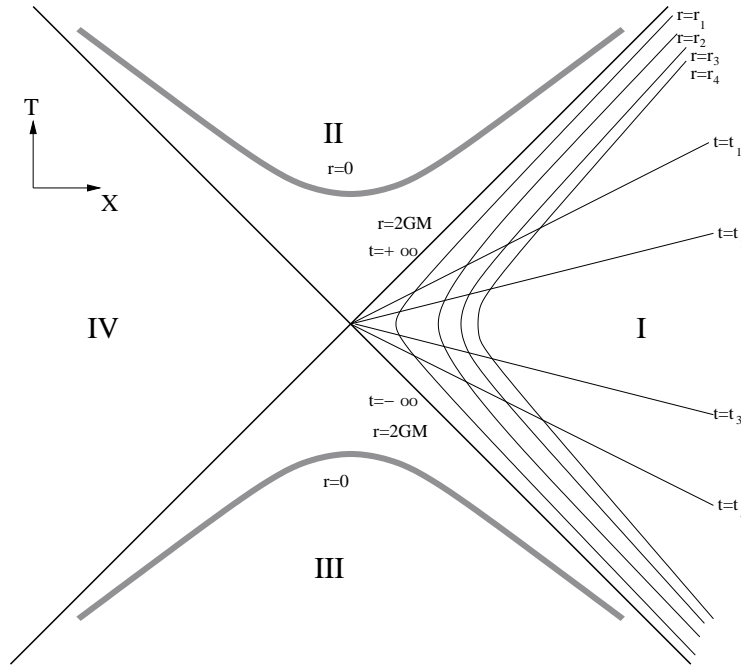


Figure 3.7: Estensione di Kruskal dello spazio-tempo di Schwarzschild

mentre t é legata alle nuove coordinate da

$$t = \frac{u+v}{2} = -2GM \log -U + 2GM \log V = 2GM \log \frac{V}{-U} = 2GM \log \frac{X+T}{X-T} = 4GM \tanh^{-1} \frac{T}{X}. \quad (3.45)$$

Nella fig. 3.7 viene riportata una rappresentazione bidimensionale dell'estensione di Kruskal dello spazio-tempo di Schwarzschild: come prima, ogni punto di coordinate (t_0, r_0) rappresenta la sfera di centro $(t_0, 0)$ e raggio r_0 . Tale diagramma puó essere capito ed interpretato, utilizzando le equazioni (3.44) e (3.45), che legano tra di loro le coordinate (t, r) di Schwarzschild a quelle (T, X) di Kruskal.

Schematicamente le caratteristiche principali del diagramma di Kruskal sono le seguenti:

1. *Le curve di tipo nullo sono quelle di equazione $T = \pm X + cost$. Questo deriva dal fatto che in coordinate (U, V) , le curve di tipo nullo hanno equazione $U = cost$ e $V = cost$ e dal legame $V = T + X, U = T - X$ che intercorre tra i due sistemi di coordinate.*
2. *Il vettore tangente nel generico punto di una curva di tipo tempo, deve formare con l'asse T un angolo inferiore a 45^0 gradi. Ció perché deve essere interno al cono di luce ed i coni di luce sono formati da rette a 45^0 gradi (fig. 3.8).*
3. *L'orizzonte degli eventi é costituito dalle due rette $T = \pm X$, mentre nelle vecchie coordinate é $r = r_S$ e $t = \pm\infty$. In coordinate (U, V) , l'orizzonte degli eventi ha equazione $U = 0, V = 0$, che in coordinate (T, X) diventa $T = \pm X$. Mentre per la (3.45), su $T = \pm X$ deve essere $t = \pm\infty$, ció é in accordo con quanto dimostrato prima, cióé che una particella impiega un tempo coordinato infinito per arrivare sull'orizzonte degli eventi e spiega il motivo della singolaritá sull'orizzonte degli eventi.*
4. *La singolaritá geometrica $r = 0$, é l'iperbole di tipo spazio, di equazione $X^2 - T^2 = -1$ e dovendo essere $r > 0$, lo spazio-tempo si riduce all'aperto delimitato dalla disequazione $X^2 - T^2 > -1$. Segue immediatamente dall'equazione (3.44) e dal fatto che in ogni punto la tangente all'iperbole ha coefficiente angolare maggiore di 1 e minore di -1 .*
5. *La regione dello spazio-tempo di Schwarzschild dove $r > r_S$ é la regione dove $X > T$ e $X > 0$, cióé la regione I, mentre la regione dove $0 < r < r_S$ é la regione II, le regioni III e IV compaiono solo nelle nuove coordinate e quest'ultima é identica alla regione I. Le regioni in cui $r > r_S$, per la (3.44) sono quelle delimitate dalla disequazione $X^2 - T^2 > 0$, cióé le regioni I e IV, ma quella corrispondente allo spazio-tempo di Schwarzschild é la regione I, perché in essa deve essere $U < 0$, cióé $X > 0$. La regione con $0 < r < r_S$ dello spazio-tempo di Schwarzschild é una delle regioni contenenti la singolaritá geometrica $r = 0$, quindi o la II o la III. Ma delle due, solo la II é raggiungibile da curve di tipo tempo, orientate verso il futuro. Scambiando X con $-X$ il tensore metrico non varia, quindi le regioni I e IV sono geometricamente identiche.*

Le conseguenze logiche di quello che é stato detto sopra sono:

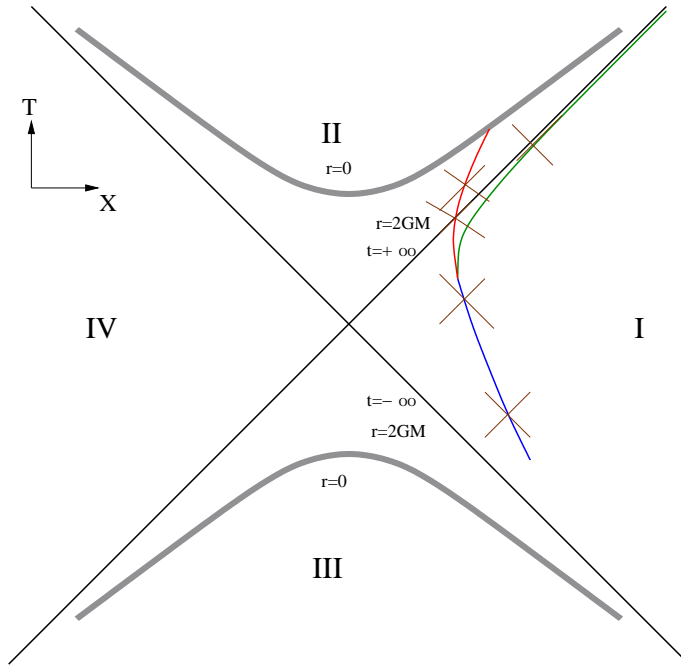


Figure 3.8: Linee di universo di due particelle, di cui solo una ha sufficiente accelerazione per non oltrepassare l'orizzonte degli eventi

1. Una particella che si trova nella regione *I* (*IV*), o non attraversa mai l'orizzonte degli eventi ed in tal caso rimane nella regione di partenza oppure, se lo attraversa, andando verso il futuro può solo raggiungere la regione *II*. Dalla regione *II* non può più scappare e dovrà cadere inesorabilmente nella singolarità a $r = 0$, infatti partendo da un qualunque punto interno della regione *II*, anche andando alla massima velocità, quella della luce, la sua traiettoria sarebbe una retta parallela ad una delle bisettrici degli assi e quindi parallela all'orizzonte ed in quanto tale non è più in grado di attraversarlo. Invece una particella che si muove alla velocità della luce, se si trova sopra l'orizzonte, può mantenere la sua linea d'universo coincidente con l'orizzonte e quindi può evitare di cadere sulla singolarità. Questo è il motivo della parola orizzonte usata per definire l'ipersuperficie $r = r_S$, infatti esso è una linea di demarcazione oltre la quale non è visibile niente, perché dentro di esso anche la luce rimane intrappolata. Per tale motivo una stella che collassando, lascia scoperto l'orizzonte degli eventi, si chiama **buco nero (black hole)**.
2. Le particelle che si trovano nella regione *III* possono solo uscire, ma non entrare.
3. Nessuna particella può andare dalla regione *I* alla regione *IV* o viceversa, infatti partendo da un punto qualunque della regione *I*, anche seguendo una retta parallela ad una bisettrice (velocità della luce), si rimane paralleli all'orizzonte e quindi o si cade nella regione *II* o si resta nella regione di partenza.

Nel tentativo di mettere assieme in un unico spazio-tempo connesso le regioni $r > r_S$ e $0 < r < r_S$ dello spazio-tempo di Schwarzschild, sono state trovate le coordinate di Kruskal, che, oltre a risolvere tale problema, fanno nascere le due nuove regioni *III* e *IV*, dove la *IV* è identica alla *I* e la *III* è l'immagine speculare rispetto al tempo della *II*. La regione *III*, non viene considerata una regione fisica, nel senso di potere effettivamente esistere in una situazione reale. Tentiamo di visualizzare geometricamente la regione *IV*. Nella fig. 3.7, si vede che le ipersuperfici $t = cost$ sono rappresentate dalle rette uscenti dall'origine. Esse attraversano sia la regione *I* che la regione *IV* ed il punto di collegamento è l'origine, cioè la sfera $t = cost, r = r_S$. Quindi, ciascuna di tali ipersuperfici è rappresentata da due spazi asintoticamente piatti, collegati tra di loro da un cunicolo passante per l'orizzonte degli eventi. Nella fig. 3.9 è rappresentata tale superficie con una dimensione spaziale in meno: le sfere sono state sostituite con il loro equatore $\theta = \frac{\pi}{2}$. Guardando la fig. 3.9, si ha la sensazione che attraversando l'orizzonte degli eventi si possa uscire in un altro universo identico a quello in cui si è entrati. Ciò ovviamente non è vero, perché per quanto si è visto prima, i due universi non sono collegabili con curve di tipo tempo, quindi chi entra nel cunicolo o da una parte o dall'altra, e attraversa l'orizzonte degli eventi, dovrebbe viaggiare con una velocità maggiore di quella della luce per poter sfuggire alla singolarità ed entrare nell'altro universo.

Se consideriamo una stella a simmetria sferica ma dotata di carica elettrica e , integrando le equazioni di Einstein, si ottiene la soluzione di Reissner-Nordström:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (3.46)$$

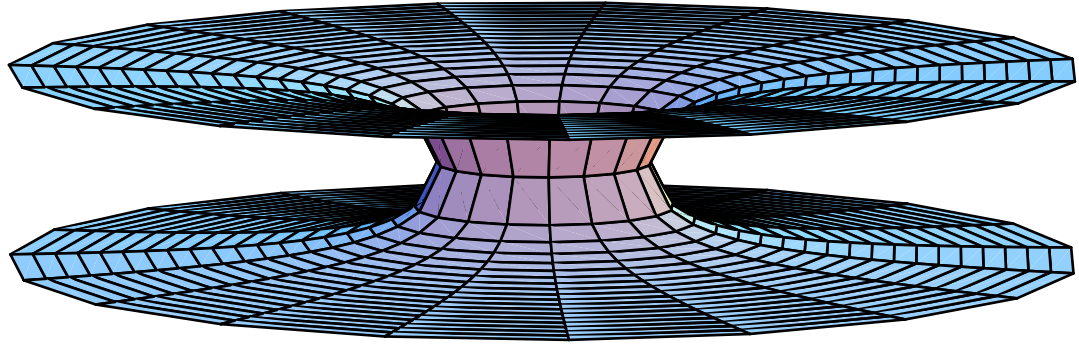


Figure 3.9: Superficie $t = cost, \theta = \frac{\pi}{2}$, la parte piú stretta del cunicolo é $r = r_S$.

dove le unità di misura sono state prese in maniera tale che $c = G = 1$. Si vede immediatamente che per $e = 0$ la metrica (3.46) si riduce alla metrica di Schwarzschild. Estendendo tale spazio-tempo, come si é fatto nel caso di Schwarzschild, si vede che la singolarità geometrica $r = 0$ corrisponde ad una curva di tipo tempo, quindi evitabile anche a velocità inferiori a quella della luce ed inoltre per $0 < e^2 < m^2$, dopo la regione con la singolarità, c'è un universo simile a quello da cui si é usciti, accessibile anche a velocità inferiore a quella della luce.

Quanto é stato detto prima, porta ad situazioni paradossali, sia nel caso dello spazio-tempo di Schwarzschild sia in quello di Reissner-Nordström, una stella a simmetria sferica, collassando crea un altro universo che nel primo caso (carica nulla) é inaccessibile, mentre nel secondo caso (carica non nulla) é addirittura accessibile. A questo punto bisogna dire che non c'è motivo per ritenere che esistano stelle cariche, perché in una stella, le cariche elettriche positive sono, grosso modo uguali in numero a quelle negative. Ma anche se esistessero, poiché il secondo universo si trova nel futuro rispetto al primo, un osservatore o una telecamera che riuscisse ad attraversare il cunicolo, integro malgrado le enormi forze mareali, non potrebbe piú comunicare con l'universo che si é lasciato alle spalle.

In conclusione, questi neo-universi non vengono considerati fisici, ma solo il prodotto secondario di una trasformazione matematica che serve ad eliminare le singolarità non geometriche. Però il fatto che questi cunicoli vengano fuori matematicamente dalle equazioni di Einstein, fa pensare che essi possano emergere in situazioni diverse ed in forma meno paradossale. Per esempio, cunicoli di questo genere, che vengono chiamati **wormholes**, potrebbero essere delle scorciatoie per collegare zone molto distanti dell'universo. Alcuni hanno proposto che lo spazio-tempo su scala microscopica non sia un continuo omeomorfo ad \mathbb{R}^4 , ma che abbia una topologia estremamente complessa formata da un intreccio inestricabile di tali cunicoli, la cosiddetta *schiuma spazio-temporale*.

3.3.4 Verifiche sperimentali

Si é già visto nella discussione sulle orbite nello spazio-tempo di Schwarzschild che, nel caso in cui, durante il moto, r diventa cos'ì piccolo che il limite classico non é piú valido, allora le orbite differiscono sostanzialmente da quelle classiche. In particolare, nel caso dei moti legati, si é visto che il perielio dell'orbita subisce uno spostamento dopo ogni giro. Questa previsione é una descrizione qualitativa dell'orbita di Mercurio, il quale trovandosi piú vicino al Sole degli altri pianeti é piú sensibile agli effetti non classici del campo gravitazionale. Le previsioni sull'orbita di Mercurio, dedotte nell'ambito dello spazio-tempo di Schwarzschild, sono in accordo anche quantitativamente con i dati sperimentali. Ma gli accordi piú spettacolari con i dati sperimentali si hanno dove il campo gravitazionale é molto forte, quindi dove la differenza tra le previsioni delle due teorie é notevole. Questo é il caso del pulsar binario 1916 + 13, che mostra una forte precessione causata dall'orbita molto eccentrica in cui il semiasse maggiore é dell'ordine di un milione di chilometri¹⁶. Il valore numerico di tale precessione é in perfetto accordo con le previsioni relativistiche.

Altre verifiche sperimentali riguardano la deflessione della luce da parte del campo gravitazionale, che abbiamo visto nello studio delle geodetiche di tipo nullo dello spazio-tempo di Schwarzschild. Per verificare questo effetto basta semplicemente confrontare due fotografie dello stesso campo stellare, riprese rispettivamente, quando il campo stellare viene visto vicino al bordo solare durante un'eclissi, ed a distanza di sei mesi in assenza del Sole. Come si vede dalla fig. 3.10, i raggi luminosi passanti vicino al Sole arrivano all'osservatore deviati di un certo angolo rispetto a quando non c'è il campo gravitazionale del Sole. Tale angolo, dedotto dall'integrazione approssimata dell'equazione (3.27) é in accordo con quello che determina la differenza di posizione del campo stellare nelle due foto, con errori non superiori al 20%.

¹⁶tenendo conto che la distanza media Terra-Sole é di circa 149 milioni di chilometri, la grande eccentricità dell'orbita dá un'idea di quanto piccola deve essere la distanza minima tra tale pulsar e la sorgente del campo gravitazionale.

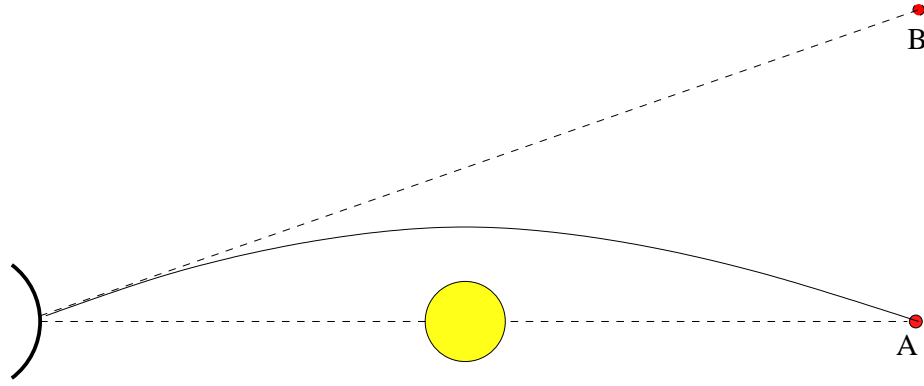


Figure 3.10: Posizione reale e posizione apparente di una stella vista attraverso un campo gravitazionale.

Migliori risultati si ottengono misurando la deflessione di radioonde emesse da sorgenti quasi-stellari, mediante radiotelescopi. Due di queste sorgenti 3C279 e 3C273, vengono periodicamente occultate dal sole e si prestano a misure con margine di errore piccolo (uno per cento). Altre verifiche sono state eseguite misurando echi radar da parte di pianeti e satelliti artificiali in orbita attorno al Sole.

Spostamento gravitazionale verso il rosso

Un'altra previsione della relatività generale è la variazione della lunghezza d'onda della luce nell'attraversamento di un campo gravitazionale. Tutte le particelle materiali che salgono in un campo gravitazionale, vengono rallentate e quindi perdono energia cinetica. La stessa cosa vale per la luce, solo che i fotoni dovendo viaggiare (nel vuoto) a velocità invariabile c , manifestano la perdita di energia in una diminuzione della frequenza, legata all'energia dalla formula $E = h\nu$, dove h è la costante di Planck.

Per spiegare quantitativamente questo fenomeno, consideriamo un osservatore B in quiete sulla superficie di una stella o di un pianeta di massa M e raggio R ed un osservatore A, in quiete rispetto a B ma ad un'altezza r_A maggiore di R , quindi le linee di universo dei due osservatori sono linee coordinate di t , cioè, la linea di universo di B è $(t, r = R, \theta = \theta_B, \phi = \phi_B)$ mentre quella di A è $(t, r = r_A, \theta = \theta_A, \phi = \phi_A)$, mentre il tempo proprio dei due osservatori, come si è già visto in diverse occasioni, è $\tau_B = e^{\frac{\nu(R)}{2}} t = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} t$, $\tau_A = e^{\frac{\nu(r_A)}{2}} t = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}} t$, dove le unità di misura sono generiche. Supponiamo, ora, che B illumini A.

Proposizione 3.3.2 *Sia t_B è l'istante in cui una data cresta d'onda parte da B e t_A quello in cui arriva in A. Se la successiva cresta d'onda parte da B all'istante $t_B + T$, allora essa arriverà in A all'istante $t_A + T$.*

Dimostrazione. Sia $\gamma_0(\lambda)$, di equazioni parametriche $(t(\lambda), r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$, la geodetica di tipo nullo che descrive il moto della prima cresta d'onda, dove il parametro affine λ è scelto opportunamente affinché $\lambda = 0$ corrisponda all'evento di emissione e $\lambda = 1$ all'evento di ricevimento, quindi $t(0) = t_B, t(1) = t_A$ e le coordinate spaziali di B ed A sono rispettivamente $(r(0) = R, \theta(0) = \theta_B, \phi(0) = \phi_B)$ e $(r(1) = r_A, \theta(1) = \theta_A, \phi(1) = \phi_A)$. Ora, come si verifica immediatamente, da $\gamma_0(\lambda)$ soluzione di tipo nullo dell'equazione delle geodetiche, segue che anche $\gamma_1(\lambda)$, di equazioni parametriche $(t(\lambda) + T, r(\lambda), \theta(\lambda), \phi(\lambda))$, lo è. Inoltre, $\gamma_1(0)$ è il punto B all'istante $t_B + T$ ed avendo $\gamma_1(\lambda)$ lo stesso vettore tangente di $\gamma_0(\lambda)$, per il teorema di esistenza ed unicità, $\gamma_1(\lambda)$ rappresenta la traiettoria della seconda cresta d'onda. D'altra parte $\gamma_1(1)$ è il punto A all'istante $t(1) + T = t_A + T$. Quindi la seconda cresta d'onda arriva in A all'istante $t_A + T$. •

Dalla proposizione precedente segue che l'intervallo di tempo proprio misurato da B tra le due creste d'onda è $\tau_B = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}} T$, mentre quello misurato da A è $\tau_A = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}} T$, quindi le lunghezze d'onda misurate da A e B rispettivamente sono $\lambda_A = c\tau_A$ e $\lambda_B = c\tau_B$, da cui si vede che $\lambda_A > \lambda_B$: A misura una maggiore lunghezza d'onda e quindi una frequenza inferiore, da cui lo spostamento verso il rosso. Denotato con z l'eccedenza rispetto a 1 del rapporto tra le due lunghezze d'onda, si ha

$$1 + z = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r_A}}}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}}, \quad (3.47)$$

da cui, supponendo che A si trovi ad una distanza molto grande dalla stella, si ottiene

$$z \cong \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1, \quad (3.48)$$

che é la formula per lo spostamento gravitazionale verso il rosso. In particolare quando $R \rightarrow r_S$, $z \rightarrow +\infty$, mentre se $R \gg r_S$, allora la (3.48), trascurando i termini di ordine superiore al primo in $\frac{r_S}{R}$, si scrive

$$z \cong \frac{GM}{c^2 R}, \quad (3.49)$$

che é la formula dello spostamento verso il rosso di una stella non collassata misurato all'infinito. É stato misurato il redshift gravitazionale di alcune nane bianche, come Sirius B, dove z é dell'ordine di 10^{-4} . Ma conferme sperimentali sono avvenute anche in laboratorio utilizzando il campo gravitazionale terrestre.

3.4 Buchi neri: la soluzione di Kerr-Newman

Si é già detto che una stella, che, alla fine della sua evoluzione, possiede una massa superiore ad un certo limite, deve collassare senza limite, perché nessuna forza é in grado di sostenerla. Se il collasso é isotropo, cioè avviene in misura eguale in tutte le direzioni, allora rientriamo nell'ipotesi di simmetria sferica, e tale collasso gravitazionale dá luogo ad un orizzonte degli eventi e quindi ad un buco nero, come si é visto nello studio della soluzione di Schwarzschild. In realtà l'ipotesi di simmetria sferica, che può andare bene per lo studio del campo gravitazionale di una stella ordinaria, non é un'ipotesi realistica nel caso di un oggetto collassato. Infatti, se prima del collasso, la stella aveva una sia pur minima velocità angolare, tanto da considerare una buona approssimazione l'ipotesi di simmetria sferica, man mano che collassa, tale velocità, dovendosi conservare il momento angolare, aumenta senza limite. Quindi la soluzione di Schwarzschild, che ci dá una prima visione teorica del campo gravitazionale di una stella collassata, non é realistica, perciò bisogna trovare qualche soluzione piú rispondente alla realtà. Una soluzione che generalizza quella di Schwarzschild nel caso di una stella caratterizzata, oltre che da una massa M , anche da un momento angolare per unità di massa a , é stata trovata da Kerr nel 1963 ed estesa poi da Newmann nel caso in cui tale stella fosse dotata anche di carica elettrica Q . Tale soluzione, che verrà chiamata **soluzione di Kerr-Newman**, é a simmetria assiale e, in unità di misura dove $c = 1$ e in coordinate (t, r, θ, ϕ) di Boyer e Lindquist, ha la seguente forma

$$ds^2 = \rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\theta^2 \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2GMr}{\rho^2} (a \sin^2 \theta d\phi - dt)^2, \quad (3.50)$$

con

$$\Delta(r) = r^2 + a^2 + GQ^2 - 2GMr, \quad \rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Per quanto riguarda il collasso di un corpo qualunque, non é stata trovata nessuna soluzione esatta in relatività generale che lo descriva. Potrebbero succedere diverse cose, per esempio il corpo si può frammentare, o cambiare di forma emettendo onde gravitazionali. In ogni caso se la massa finale supera la massa critica, ci si aspetta che tale corpo diventi un buco nero, cioè che ci sia la formazione di un orizzonte degli eventi. Comunque, é opinione comune che, qualunque sia la forma del corpo prima di iniziare il collasso, alla fine l'orizzonte sarà altamente regolare. Tale congettura é basata su un teorema di Price il quale afferma che se il collasso é approssimativamente sferico, quando la stella diventa un buco nero, tutte le informazioni sul corpo di partenza, diverse da quelle riguardanti massa, momento angolare e carica elettrica, andranno perse. Quindi il risultato finale di tale collasso é la soluzione di Kerr-Newman, poiché, alla fine, le uniche quantità fisiche sopravvissute sono quelle che caratterizzano tale soluzione. Il teorema *no hair* (senza peli) che, per ora é solo una congettura, afferma che, qualunque sia lo stato iniziale del corpo prima del collasso gravitazionale, quindi anche se le ipotesi di Price non sono verificate, lo stato finale sarà caratterizzato soltanto dalla massa, momento angolare e carica elettrica del corpo di partenza. Se tale congettura fosse verificata, la (3.50), descriverebbe il risultato finale di ogni collasso gravitazionale.

In questo paragrafo la (3.50), verrà studiata brevemente, solo per mettere in risalto le differenze con la soluzione di Schwarzschild, a cui essa si riduce per $a = Q = 0$. Poiché, come 'e stato già osservato, tipicamente una stella non ha carica elettrica, non si perderá molto in generalità mettendoci nell'ipotesi che $Q = 0$. In questa ipotesi la (3.50) é formalmente la stessa, l'unica differenza é l'espressione di $\Delta(r)$, che per $Q = 0$ diventa $\Delta(r) = r^2 + a^2 - 2GMr$.

Consideriamo un osservatore in quiete rispetto alle stelle fisse, quindi le sue coordinate spaziali sono costanti. la sua linea di universo ha equazioni parametriche $(t, r = r_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0)$. Affinché un tale moto sia possibile, il vettore tangente alla linea d'universo $\frac{\partial}{\partial t}$ deve essere di tipo tempo, quindi $g_{00}(t, r_0, \theta_0, \phi_0) < 0$, cioè $-1 + \frac{2GMr}{\rho^2} < 0$, da cui $r^2 - 2GMr + a^2 \cos^2 \theta > 0$, quindi

$$r > r(\theta) \quad \text{dove} \quad r(\theta) = GM + \sqrt{G^2 M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.51)$$

La superficie limite $r = r(\theta)$ si chiama **limite statico** e delimita, come si é detto prima la regione in cui si può stare fermi rispetto alle stelle fisse, da quella in cui ciò non é possibile.

Le possibili singolarità della metrica (3.50) sono per $\Delta = 0$ e per $\rho^2 = 0$.

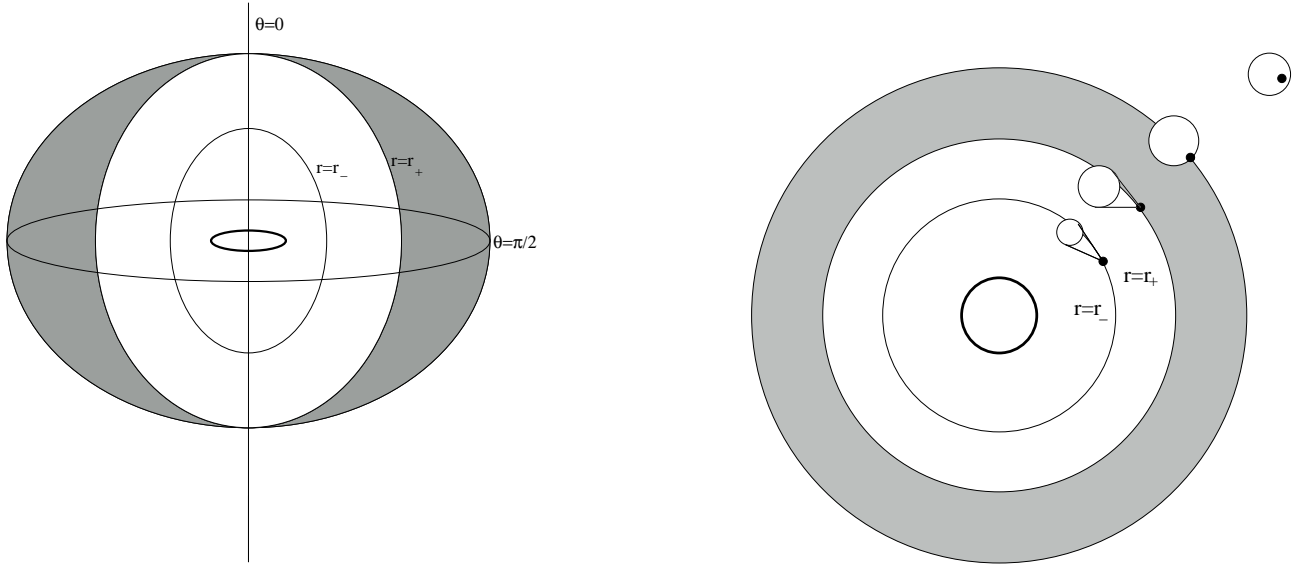


Figure 3.11: Limite statico, orizzonti degli eventi e singolarit , nel caso $a^2 < G^2 M^2$, la zona in grigio   l'ergosfera. Nella seconda figura   rappresentata la sezione equatoriale ($\theta = \frac{\pi}{2}$), si notino i coni di luce tangenti agli orizzonti.

Nel caso $\Delta = 0$ il discriminante di tale equazione   $4(G^2 M^2 - a^2)$, quindi i soli casi in cui $\Delta = 0$ determina singolarit , sono quelli in cui $G^2 M^2 \geq a^2$. Nel caso in cui $a^2 < G^2 M^2$ l'equazione $\Delta = 0$ ammette le soluzioni $r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - a^2}$ che corrispondono a due superfici $r = r_+$ e $r = r_-$. Si pu  dimostrare che le singolarit  su tali superfici non sono geometriche e quindi eliminabili con un'estensione dello spazio-tempo e che esse rappresentano fisicamente orizzonti degli eventi come nel caso della metrica di Schwarzschild, cio  punti di non ritorno oltrepassati i quali non si pu  pi  tornare indietro. Perci  $r = r_+$   la superficie di un buco nero.

Poich  $r_+ \leq r(\theta)$ e $r_+ = r(\theta) \Leftrightarrow \theta = 0, \pi$, la superficie di limite statico ha al suo interno l'orizzonte pi  grande $r = r_+$ fig. 3.11¹⁷. La zona compresa tra le due superfici si chiama **ergosfera** ed   precisamente quella regione in cui non si pu  stare in quiete rispetto alle stelle fisse, ma dalla quale si pu  ancora uscire con una velocit  inferiore a quella della luce.

Si pu  dimostrare che se si accresce la massa di un buco nero mantendone l'area costante   possibile diminuire il momento angolare, questo ha fatto pensare ad un modo per poter estrarre energia da un buco nero: se si fa cadere un corpo nell'ergosfera in maniera tale che una parte di esso cada nel buco nero e l'altra parte riesca ad uscire dall'ergosfera, l'aumento di massa che ne consegue per il buco nero, ha come controparte una diminuzione di momento angolare che viene trasmesso alla parte che esce. Questo   un modo di convertire massa in energia, estraendola da un buco nero. Chiaramente tale procedimento non pu  durare all'infinito: oltre un certo limite il buco nero esaurisce tutto il suo momento angolare, riducendosi ad un buco nero di Schwarzschild, dove non c'  ergosfera e dove, quindi, questo procedimento non   applicabile.

Nel caso in cui $a^2 = G^2 M^2$, c'  un solo orizzonte degli eventi, ma non ci sono differenze sostanziali rispetto al caso precedente. Se invece $a^2 > G^2 M^2$, non c'  nessun orizzonte e quindi non c'  formazione di un buco nero.

Restano da studiare la singolarit  $\rho^2 = 0$. Passando alle coordinate di Kerr-Schild (\bar{t}, x, y, z) ¹⁸ con la trasformazione di coordinate

$$x + iy = (r + ia) \sin \theta \exp i \int (d\phi + \frac{a}{\Delta} dr), \quad z = r \cos \theta, \quad \bar{t} = \int (dt + \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr) - r, \quad (3.52)$$

la metrica diventa

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{2GM r^3}{r^4 + a^2 z^2} (d\bar{t} + \frac{r(xdx + ydy) - a(xdy - ydx)}{r^2 + a^2} + \frac{z}{r} dz)^2, \quad (3.53)$$

dove r   determinato implicitamente dall'equazione

$$r^4 - (x^2 + y^2 + z^2 - a^2)r^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (3.54)$$

L'equazione precedente, per $r > 0$, si pu  anche scrivere

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1, \quad (3.55)$$

¹⁷Nello spazio-tempo di Schwarzschild, il limite statico e l'orizzonte degli eventi coincidono.

¹⁸in queste coordinate fu trovata inizialmente la soluzione di Kerr.

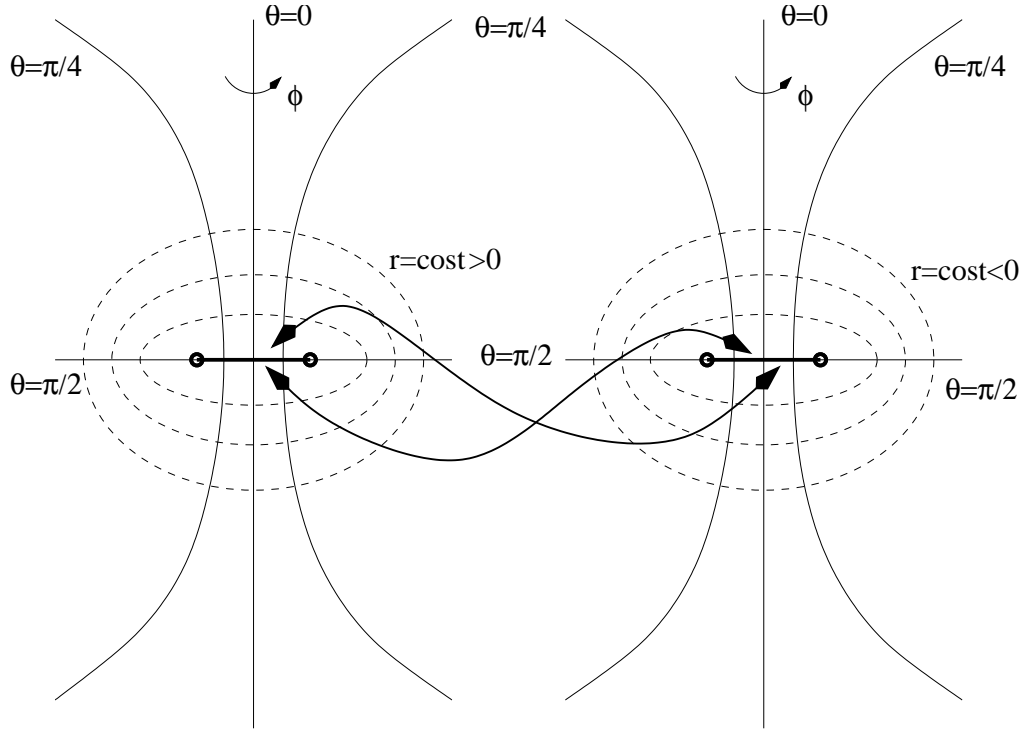


Figure 3.12: Sezioni $y = 0$ e $y' = 0$ degli spazii-tempo $r \geq 0$ e $r \leq 0$ ed il modo in cui si raccordano sul disco $x^2 + y^2 < a^2, z = 0$ per formare uno spazio-tempo unico.

che, per $r = r_0$, rappresenta un ellissoide: linee tratteggiate nella fig. 3.12. La coordinate di Boyer-Lindquist r é non negativa, però dall'equazione precedente si vede che le equazioni $r = r_0 < 0$ definiscono le stesse superfici. Anzi si può fare di piú: si possono considerare le trasformazioni (3.52) anche per $r \leq 0$, ottenendo un sistema di coordinate (x', y', z') , rispetto a cui la metrica (3.53) resta inalterata. Quindi si possono considerare due spazii-tempo distinti, in coordinate (\bar{t}, x, y, z) e (\bar{t}, x', y', z') rispettivamente, con tensore metrico avente la stessa espressione analitica, corrispondenti a $r \geq 0$ e $r \leq 0$ ¹⁹. Nella fig. 3.12 sono rappresentate le sezioni (x, z) e (x', z') .

L'equazione (3.55) vale nel caso in cui $r \neq 0$, volendo vedere che risultato dá per $r = 0$, basta utilizzare la terza delle (3.52), ottenendo

$$x^2 + y^2 = \sin^2 \theta (r^2 + a^2), \quad (3.56)$$

che per $r = 0$ diventa

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta.$$

Quindi per $r = 0$ gli ellissoidi degenerano nel disco $x^2 + y^2 \leq a^2$, che, per la seconda delle (3.52), appartiene al piano $z = 0$. In particolare, poiché ρ^2 si annulla quando contemporaneamente $r = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, ne segue che $\rho^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = a^2$, cioè la metrica é singolare sulla circonferenza $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$. Facendo i conti si vede che l'invariante $R^{ijhk} R_{ijhk}$ diverge su tutti i punti di tale circonferenza, quindi essa é una singolaritá geometrica. Nella fig. 3.11 é evidenziata la circonferenza singolare nel piano equatoriale. Nella fig. 3.12, che riporta le sezioni $y = 0$ e $y' = 0$, il disco $r = 0$, si riduce ad un segmento e la circonferenza singolare, ai suoi estremi.

I due spazii-tempo (\bar{t}, x, y, z) e (\bar{t}, x', y', z') , possono essere *incollati* in modo da formare uno spazio-tempo unico. Poiché uno é definito per $r \geq 0$ e l'altro per $r \leq 0$, essi possono essere raccordati per $r = 0$, cioè sul disco $x^2 + y^2 < a^2, z = 0$. Precisamente tale operazione viene fatta identificando ogni punto di coordinate (x, y) che si trova sulla parte superiore del disco con il punto di coordinate $(x' = x, y' = y)$ che sta sulla parte inferiore e viceversa. In tale modo una curva che si trova nel primo spazio-tempo ed attraversa il disco dalla parte superiore esce nel secondo spazio-tempo dalla parte inferiore e viceversa.

Proposizione 3.4.1 *Tale spazio-tempo, cosí esteso possiede curve chiuse di tipo tempo.*

Dimostrazione. Le curve $(t_0, r_0, \theta_0, \phi)$ sono le curve $\theta = \theta_0$ tracciate sull'ellissoide $t = t_0, r = r_0$, che per la terza delle (3.52) e la (3.56) sono le circonferenze di equazione $z = r_0 \cos \theta_0, x^2 + y^2 = \sin^2 \theta_0 (r_0^2 + a^2)$. Quindi sono chiuse. A questo punto, basta dimostrare che tali curve chiuse, per opportuni valori delle costanti, hanno il vettore tangente $\frac{\partial}{\partial \phi}$ di

¹⁹si tenga conto che i valori r_+ e r_- a cui corrispondono gli orizzonti, se esistono, sono sempre positivi, per cui lo spazio-tempo con $r \leq 0$ non ha orizzonti.

tipo tempo e quindi sono di tipo tempo. $\frac{\partial}{\partial\phi} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} = g_{\phi\phi} = (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2GMra^2 \sin^4 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}$. Se si sceglie $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ e $r_0 < 0$, cioè si sceglie come curva chiusa l'intersezione tra il piano equatoriale $\theta = \frac{\pi}{2}$ e l'ellissoide $r = r_0 < 0$, allora se $r_0^2 \ll a^2$, $r^2 + a^2 \approx a^2$ e quindi $\frac{\partial}{\partial\phi} \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} = a^2(1 + \frac{2GM}{r_0})$. Se r_0 é sufficientemente piccolo in valore assoluto, allora tale valore é negativo quindi $\frac{\partial}{\partial\phi}$ é di tipo tempo. •

3.5 Soluzioni cosmologiche

Fino ad ora sono state considerate soluzioni delle equazioni di Einstein, rappresentanti il campo gravitazionale generato da una massa M . Ci si può chiedere se esistono soluzioni rappresentanti l'intero universo, cioè modelli cosmologici. La prima cosa da fare per costruire tali modelli é, cosí come é stato fatto per ricavare la soluzione di Schwarzschild, specificare il campo materiale e le eventuali simmetrie di cui deve godere il tensore metrico, in maniera tale che le equazioni di campo diventino trattabili.

Per quanto riguarda le simmetrie, bisogna partire da regole dedotte dall'osservazione dell'universo. Da Copernico in poi, l'idea comune che abbiamo circa la nostra posizione nell'universo é che essa non sia privilegiata rispetto alle altre: viviamo su un pianeta di media grandezza, che orbita attorno ad una stella di media grandezza, che si trova sul bordo esterno di una galassia media, la quale appartiene ad un gruppo locale di galassie. Il principio secondo cui, quello che vediamo dalla nostra posizione, per quanto riguarda l'universo su larga scala, é simile a quello che vede un osservatore posto in qualunque altro punto dell'universo, verrà chiamato *principio copernicano* e verrà assunto come base del ragionamento che segue.

Dalle osservazioni fatte sul cosmo dalla nostra posizione, si può dedurre che l'universo é con buona approssimazione isotropo su larga scala. Questo vuol dire che, su una scala sufficientemente grande in cui le irregolarità locali sono trascurabili, l'universo é approssimativamente lo stesso in tutte le direzioni. La scala di grandezza deve essere tanto grande che la materia dell'universo deve essere assimilabile ad un fluido, altrimenti quello che si osserva in direzione della via lattea é certamente diverso da quello che si osserva in una direzione diametralmente opposta. Le osservazioni piú recenti che confermano tale isotropia riguardano la rilevazione di radiosorgenti extragalattiche e la radiazione cosmica di fondo.

L'isotropia implica che con buona approssimazione l'universo é a simmetria sferica rispetto al nostro punto di osservazione ed utilizzando il principio copernicano, ne segue che l'universo deve essere a simmetria sferica rispetto ad ogni suo punto. É stato dimostrato da Walker che, l'ipotesi di simmetria sferica attorno ad ogni punto implica che nello spazio-tempo le superfici tridimensionali Σ_t di tempo costante, misurato dalle linee d'universo del fluido cosmico, hanno la massima omogeneità possibile: sono a curvatura costante. Le superfici tridimensionali a curvatura costante sono di tre tipi: a curvatura positiva, nulla e negativa e sono caratterizzate dalla metrica propriamente riemanniana

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + f^2(\chi)d\Omega^2, \quad (3.57)$$

dove, al solito $d\Omega^2$ é il tensore metrico della sfera bidimensionale di raggio unitario, e, denotata con K la curvatura normalizzata,

$$f(\chi) = \begin{cases} \sin \chi, & \text{se } K = 1; \\ \chi & \text{se } K = 0; \\ \sinh \chi & \text{se } K = -1. \end{cases} \quad (3.58)$$

Quindi la (3.57) é la metrica di una sfera tridimensionale, di uno spazio euclideo o di un iperboloide tridimensionale, secondo che $K = 1, 0, -1$.²⁰

Nel seguito verrà assunto che il tensore metrico abbia la forma generale

$$ds^2 = -dt^2 + S^2(t)d\sigma^2 \quad S(t) > 0, \quad (3.59)$$

²⁰Per $K = 1$, la sfera tridimensionale di raggio R , $x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = R^2$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y = R \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ z = R \sin \chi \cos \theta, \\ v = R \cos \chi. \end{cases}$$

per cui la metrica indotta da quella euclidea $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dv^2$, si riduce, per $R = 1$, alla (3.57). Per $K = 0$, la (3.57) é la metrica euclidea in coordinate sferiche. Per $K = -1$, l'iperboloide $x^2 + y^2 + z^2 - v^2 = -R^2$, ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = R \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\ y = R \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ z = R \sinh \chi \cos \theta, \\ v = R \cosh \chi. \end{cases}$$

e la metrica indotta dalla $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dv^2$ é, per $R = 1$, la (3.57), che, anche se indotta da una metrica pseudo-euclidea, é propriamente riemanniana.

questo significa che, l'unica funzione incognita $S(t)$, é, nel caso $K = 0$, un fattore di scala, negli altri casi misura la dimensione di Σ_t , per esempio se $K = 1$, $S(t)$ é il raggio della sfera Σ_t . La conoscenza di $S(t)$, che ci fa conoscere l'evoluzione delle superfici di curvatura costante Σ_t , verrà determinata dalle equazioni di campo. Uno spazio-tempo con il tensore metrico (3.59), si chiama **spazio-tempo di Friedmann-Robertson-Walker** (FRW).

Inoltre verrà fatta l'ipotesi che il fluido cosmico sia un fluido perfetto, quindi avente la forma generale $T^{ij} = (\mu + p)V^iV^j + pg^{ij}$, essendo μ la densità di energia, p la pressione e V il campo di quadrivelocità del fluido. Poiché all'inizio si é assunto che il tempo coordinato t fosse il tempo proprio del fluido, allora $V = \frac{\partial}{\partial t}$ ed inoltre dovendo essere le superfici di tempo costante Σ_t , omogenee, le variabili μ e p devono essere costanti su di esse, ciò vuol dire che possono essere solo funzioni di t : $\mu = \mu(t), p = p(t)$.

Partendo da queste premesse, possiamo provare a scrivere le equazioni di campo, che sono le equazioni di Einstein $G_{ij} + \Lambda g_{ij} = 8\pi T_{ij}$, che consideriamo nel caso piú generale, per vedere cosa succede variando il valore della costante cosmologica e le equazioni di conservazione $\nabla_i T^{ij} = 0$.

I soli coefficienti della connessione non nulli sono:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{11} = S\dot{S}, \quad \Gamma^0_{22} = f^2 S\dot{S}, \quad \Gamma^0_{33} = f^2 \sin^2 \theta S\dot{S}, \quad \Gamma^1_{01} = \frac{\dot{S}}{S}, \quad \Gamma^1_{22} = -ff', \quad \Gamma^1_{33} = -ff' \sin^2 \theta, \\ \Gamma^2_{02} = \frac{\dot{S}}{S}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma^2_{33} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma^3_{03} = \frac{\dot{S}}{S}, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{f'}{f}, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

dove $\dot{} = \frac{d}{dt}$ e $\prime = \frac{d}{d\chi}$.

Le componenti del tensore di Ricci non nulle sono:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{S}}{S}, \quad R_{11} = S^2\left(\frac{\ddot{S}}{S} + 2\frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{2K}{S^2}\right), \quad R_{22} = f^2 R_{11}, \quad R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}.$$

Lo scalare di curvatura é

$$R = 6\left(\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{K}{S^2}\right),$$

quindi le componenti non nulle del tensore di Einstein sono:

$$G_{00} = R_{00} + \frac{R}{2} = 3\frac{\dot{S}}{S^2} + 3\frac{K}{S^2}, \quad G_{11} = R_{11} - S^2\frac{R}{2} = -S^2\left(2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{K}{S^2}\right), \quad G_{33} = \sin^2 \theta G_{22} = f^2 \sin^2 \theta G_{11}.$$

Quindi le equazioni di Einstein si scrivono:

$$\begin{aligned} 3\frac{\dot{S}^2}{S^2} + 3\frac{K}{S^2} - \Lambda = 8\pi G\mu, \\ 2\frac{\ddot{S}}{S} + \frac{\dot{S}^2}{S^2} + \frac{K}{S^2} - \Lambda + 8\pi Gp = 0, \end{aligned}$$

ricavando $\frac{\dot{S}^2}{S^2}$ dalla prima, sostituendolo nell'ultima e moltiplicando la prima per S^2 , si ottiene

$$3\dot{S}^2 = 8\pi G\mu S^2 + \Lambda S^2 - 3K, \tag{3.60}$$

$$3\frac{\ddot{S}}{S} = -4\pi G(3p + \mu) + \Lambda. \tag{3.61}$$

Infine, la divergenza del tensore energia impulso si scrive

$$\nabla_i T^{ij} = (\nabla_i \mu + \nabla_i p)V^iV^j + (\mu + p)(\nabla_i V^i)V^j + (\mu + p)V^i\nabla_i V^j + (\nabla_i p)g^{ij},$$

da cui tenendo conto che $V^i = (1, 0, 0, 0)$, e dall'espressione dei coefficienti della connessione già calcolati, si ha:

$$\nabla_i V^i = \Gamma^i_{i0} = 3\frac{\dot{S}}{S}, \quad V^i\nabla_i V^j = \nabla_0 V^j = \Gamma^j_{00} = 0.$$

Da quest'ultima equazione si deduce che il moto del fluido cosmologico é geodetico. Infine tenedo conto di quanto ottenuto sopra e che la derivata covariante di una funzione si riduce alla derivata ordinaria, si ricava

$$\nabla_i T^{ij} = (\dot{\mu} + \dot{p})\delta^j_0 + 3(\mu + p)\frac{\dot{S}}{S}\delta^j_0 - \dot{p}\delta^j_0.$$

Quindi l'equazione di conservazione $\nabla_i T^{ij} = 0$, diventa

$$\dot{\mu} = -3(\mu + p)\frac{\dot{S}}{S}. \quad (3.62)$$

Le equazioni (3.60)-(3.62), non sono indipendenti. L'equazione (3.60) é un integrale primo delle (3.61), (3.62), infatti é immediato constatare che una volta derivata ed eliminato $\dot{\mu}$ con la (3.62), si ottiene la (3.61). Però in un integrale primo compare una costante di integrazione arbitraria, mentre la costante che compare nella (3.60) é $-3K$, che può assumere solo tre valori. Quindi il ruolo dell'equazione (3.60) é quello di assegnare la costante di integrazione, per il resto le equazioni indipendenti sono due. Delle tre variabili $S(t), \mu(t), p(t)$, solo due restano indipendenti, una volta che é assegnata l'equazione di stato del fluido.

Assumendo $\mu > 0$ e $p \geq 0$, nel caso in cui $\Lambda = 0$, la (3.61) implica che $\ddot{S}(t) < 0$, quindi $S(t)$ non può essere costante, cioè, l'universo é in espansione o in contrazione. Dalle osservazioni, si vede che le galassie si allontanano, questo significa che attualmente l'universo é in espansione. In particolare, posto $H = \frac{\dot{S}}{S}$ e denotato con $t = 0$, l'era attuale, dalle osservazioni si deduce che $H(0) \approx 10^{-10} \text{anni}^{-1}$, tale valore si chiama **costante di Hubble**. Poiché $S(0) > 0, \dot{S}(0) > 0$ ed essendo $\ddot{S}(t) < 0$, ne segue che $\dot{S}(t) > \dot{S}(0) > 0 \forall t < 0$, da cui, non potendosi annullare la derivata prima di $S(t)$ andando verso il passato, il grafico di $S(t)$ deve incontrare necessariamente l'asse delle ascisse per qualche valore finito di t , quindi deve esistere un istante $t_0 < 0$ tale che $S(t_0) = 0$. Questo, per la (3.60), implica che $\lim_{t \rightarrow t_0+} \mu = +\infty$. Questo implica che $S = 0$, non é una singolarità dovuta alle coordinate, ma corrisponde ad una singolarità dello spazio-tempo.

Poiché le condizioni $S(0) > 0, \dot{S}(0) > 0$ non possono essere eliminate perché la $S(t)$ é sempre positiva e all'istante attuale l'universo é in espansione, l'esistenza della singolarità nel passato dipende da $\ddot{S}(t) < 0$, che é stato ricavato dalla (3.61) con delle particolari assunzioni. Da quest'ultima equazione si vede qual'é il caso piú generale in cui $\ddot{S}(t) < 0$: $\mu + 3p > 0$ e $\Lambda \leq 0$ o anche positivo, ma in ogni caso inferiore al minimo della funzione $\mu + 3p$. Quindi, in tale ipotesi, lo spazio-tempo é singolare nel passato e poiché tale singolarità é geometrica, non é prolungabile ad istanti antecedenti t_0 , ne segue che lo spazio-tempo ha avuto inizio in tale istante.

Quanto detto é la previsione teorica della **teoria del big-bang**, secondo cui l'universo ha avuto origine in passato da un'esplosione iniziale. Tale teoria é suffragata oltre che dall'osservazione dell'allontanamento delle galassie, anche dalla radiazione cosmica di fondo, rilevata alla fine degli anni sessanta, che é una conseguenza di tale teoria.

Anche se l'universo nella presente epoca ha, con buona approssimazione, le simmetrie che sono state imposte, si potrebbe pensare che irregolarità locali, attualmente trascurabili, non lo siano piú, andando verso il passato con densità sempre maggiori, per cui il modello usato potrebbe essere non valido nel passato. Si potrebbe, allora, pensare che un modello meno simmetrico, quindi piú adatto a descrivere tale universo primordiale potrebbe non avere la singolarità iniziale. Tale conclusione é errata, perché oltre al fatto che sono state trovate soluzioni esatte spazialmente omogenee, ma con meno simmetrie delle soluzioni FRW, pure dotate di singolarità nel passato, come si vedrá nel prossimo paragrafo, la mancanza di simmetrie non rende le soluzioni delle equazioni di Einstein prive di singolarità, in quanto queste sono sempre presenti in condizioni estreme, facendo delle ipotesi fisiche ragionevoli.

3.5.1 Caso $p=0$

Attualmente nell'universo la materia é cosí disgregata che é assimilabile a polvere (pressione nulla), quindi l'equazione di stato $p=0$ é piú che plausibile. Inoltre le osservazioni attribuiscono a Λ un valore nullo o in ogni caso molto piccolo, per cui anche l'assunzione $\Lambda = 0$ é plausibile. Nel seguito, anche per vedere qual'é l'andamento generale delle soluzioni considereremo Λ generico, intendendo però che solo per $\Lambda = 0$ si ottengono soluzioni che possono descrivere il nostro universo.

L'equazione (3.62) può essere integrata facilmente, l'integrale generale é $\mu = \frac{h}{S^3}$ dove h é una costante positiva, che si può anche scrivere $h = \frac{3M}{4\pi}$, essendo M una costante positiva, da cui

$$\frac{4\pi}{3}\mu = \frac{M}{S^3}, \quad (3.63)$$

che sostituita nella (3.60), dá l'**equazione di Friedman**

$$\dot{S}^2 - 2\frac{GM}{S} - \frac{\Lambda}{3}S^2 = -K. \quad (3.64)$$

Le equazioni (3.63) e (3.64) esprimono rispettivamente l'equazione di conservazione della massa (a pressione nulla) e l'equazione di conservazione dell'energia (energia cinetica piú energia potenziale), dove però la costante al secondo membro non é arbitraria ma può assumere solo tre valori, secondo la geometria dell'universo.

Nelle figure 3.13, 3.14 e 3.15, vengono riportati i grafici della funzione $V(S) = -2\frac{GM}{S} - \frac{\Lambda}{3}S^2$ nei casi in cui Λ é nullo, negativo e positivo.

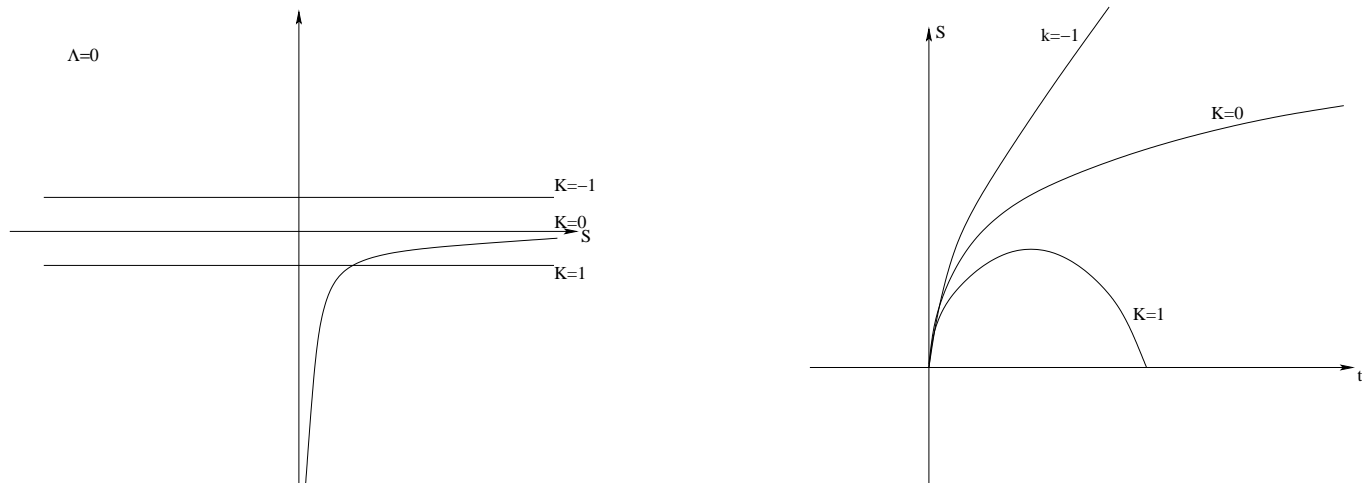


Figure 3.13: Grafico di $V(S)$ per $\Lambda < 0$ ed andamento qualitativo della funzione $S(t)$ al variare del tipo di curvatura.

Nel caso $\Lambda = 0$ la funzione $V(S)$ é il ramo di iperbole avente per asintoti gli assi ed appartenete al quarto quadrante. si vede che per $K = 1$, la banda permessa é limitata, e poiché, inizialmente S é crescente, ne segue che S raggiunge un valore massimo all'istante t_1 , tale che $S(t_1) = -1$ e dopo decresce fino ad arrivare ad $S = 0$. Nei casi $K = 0, 1$, la banda permessa é illimitata, quindi, poiché all'epoca attuale $\dot{S} > 0$, la S cresce senza limiti. Questo significa che l'evoluzione dell'universo dipende dalla sua curvatura: se la curvatura é positiva, si espande fino ad un raggio massimo, per poi ricollassare fino a $S = 0$, cioè in un'altra singolarità; se la curvatura é positiva o nulla, invece l'universo si espande senza fine. Il grafico di S é riportato, nei tre casi, nella seconda delle fig. 3.13, dove l'origine é stata presa in maniera tale che l'istante iniziale sia $t = 0$.

Osservazione 13 *Fino ad ora non é stata privilegiata nessuna delle tre ipotesi sulla curvatura. Il valore della curvatura dipende dalla materia presente nell'universo. Dalle osservazioni si ottiene un valore che oscilla attorno al valore critico che dá come risultato $K = 0$. Per essere piú chiari, negli ultimi decenni il valore che di tanto in tanto a causa di nuove scoperte o congetture²¹ viene attribuito alla massa dell'universo, ha lo stesso andamento dei risultati dei riconteggi delle schede elettorali, in Florida, in occasione delle ultime elezioni presidenziali. Quindi allo stato attuale non é chiaro se l'universo ricollasserá in un **big-crush** o se la sua espansione sará eterna.*

Nei casi $\Lambda \neq 0$ l'energia potenziale ha un punto di stazionarietà solo per $\Lambda > 0$, infatti $V'(S) = \frac{2}{3} \frac{3GM - \Lambda S^3}{S^2}$, che si annulla in $\bar{S} = \sqrt[3]{\frac{3GM}{\Lambda}}$, che é positivo solo per $\Lambda > 0$ e in questa ipotesi $V(\bar{S}) = -\sqrt[3]{9G^2 M^2 \Lambda} < 0$. Inoltre tenendo conto che in entrambi i casi $\lim_{S \rightarrow 0^+} V(S) = -\infty$, mentre $\lim_{S \rightarrow +\infty} V(S) = +\infty$ per $\Lambda < 0$ e $\lim_{S \rightarrow +\infty} V(S) = -\infty$ per $\Lambda > 0$, i grafici sono quelli riportati nelle figure 3.14 e 3.15.

Nel caso $\Lambda < 0$ é immediato constatare che, per qualunque valore di K c'è solo un tipo di soluzione: big-bang all'istante iniziale, espansione fino ad un massimo e ricollasso fino al big-crush.

Nel caso $\Lambda > 0$ la situazione é piú complessa. Per $K = 0$ o $K = -1$ ci sono solo due tipi di soluzioni: una che parte da una singolarità iniziale e si espande indefinitivamente e la simmetrica rispetto al tempo: un universo infinito che esiste da sempre ed che collassa fino ad arrivare, in un certo istante, ad una singolarità. Per $K = 1$, bisogna distinguere tre casi: il caso in cui il massimo di V é uguale a $-K = -1$ é questo succede per $\Lambda = \Lambda_{crit} = (9G^2 M^2)^{-1}$, come nella prima delle figure 3.64, se invece $\Lambda > \Lambda_{crit}$ allora $V(\bar{S}) < -K$, come nella seconda delle figure 3.15, mentre se $\Lambda < \Lambda_{crit}$ allora $V(\bar{S}) > -K$, come nella terza delle figure 3.15.

Nel caso $\Lambda = \Lambda_{crit}$, ci sono le seguenti soluzioni

1. $S(t) = \bar{S}$, che corrisponde ad una sfera tridimensionale il cui raggio resta immutato nel tempo. Questo é lo **spazio-tempo statico di Einstein**, per ottenere il quale é stata introdotta la costante cosmologica.
2. L'universo comincia da un big-bang iniziale e tende asintoticamente ad un raggio costante, cioè allo spazio-tempo statico di Einstein. La simmetrica rispetto al tempo: per $t \rightarrow -\infty$ l'universo é quello statico di Einstein e in un tempo finito, collassa in una singolarità.
3. L'universo é per $t \rightarrow -\infty$ quello statico e per $t \rightarrow +\infty$ si espande senza limite. La simmetrica rispetto al tempo.

Nel caso $\Lambda > \Lambda_{crit}$, si ha lo stesso andamento riscontrato per $K = 0$ e $K = -1$.

Nel caso $\Lambda < \Lambda_{crit}$, ci sono le seguenti due soluzioni

²¹i neutrini hanno massa? Se l'avessero, per quanto piccola, essa potrebbe essere determinante per un universo chiuso

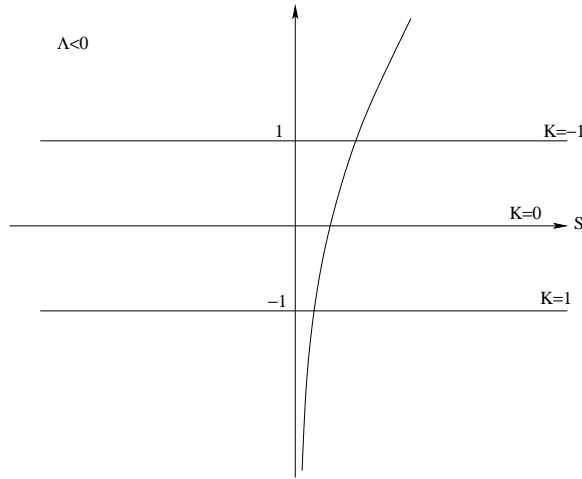


Figure 3.14: Grafico di $V(S)$ per $\Lambda < 0$.

1. La soluzione parte da una singolarità iniziale, arriva ad un raggio massimo e ricollapsa in un'altra singolarità.
2. La soluzione parte da un universo infinito per $t \rightarrow -\infty$, raggiunge un raggio minimo e si riespande indefinitivamente.

3.5.2 Caso $p = \frac{\mu}{3}$, $\Lambda = 0$

Un altro caso che può essere preso in considerazione è quello in cui l'universo è dominato dalla radiazione, ciò che avveniva nell'universo primordiale subito dopo il big-bang. In questo caso l'equazione di stato è $p = \frac{1}{3}\mu$. Integrando l'equazione (3.62), si deduce che μ è proporzionale a S^{-4} . Quindi l'equazione di Friedmann corrispondente, per $\Lambda = 0$, ha un'energia potenziale del tipo $\frac{\alpha}{S^2}$ con $\alpha < 0$. Tale funzione ha lo stesso andamento di quella ottenuta nel caso $p = 0$, quindi qualitativamente non cambia niente.

3.6 Il problema delle singolarità

Come si è visto nella descrizione del campo gravitazionale di una stella e dell'universo nel suo insieme, le soluzioni delle equazioni di Einstein esaminate, presentano delle singolarità. La presenza di campi singolari in Fisica, viene sempre interpretata come un venir meno della validità della teoria che li genera. Anche la presenza di certe situazioni patologiche come la presenza di curve chiuse di tipo tempo in cui viene meno la causalità dello spazio-tempo (la causa avviene sempre prima dell'effetto) viene interpretato piuttosto che come la speranza di un *ritorno al futuro* possibile in qualche remota zona dell'universo, come il fatto che la teoria, avvicinandoci nel luogo di non validità, cominci a *dare i numeri*.

Comunque, anche se non viene considerato *fisico* quel punto o quei punti dello spazio-tempo in cui la curvatura e quindi le forze mareali diventano infinite, non vuol dire che tali concetti perdano di validità, nelle vicinanze di questi punti, dove essa è estremamente grande senza essere infinita. Ciò vuol dire che, anche se i punti singolari devono essere rimossi dallo spazio-tempo come non fisici, nei punti vicini, le forze mareali sono ugualmente enormi.

Poiché si conoscono poche soluzioni esatte delle equazioni di Einstein, ci si potrebbe chiedere se la presenza di singolarità affligga, in generale, le soluzioni di tali equazioni o se essa sia tipica delle soluzioni più semplici.

Verso la fine degli anni sessanta dei fisici russi, congettarono che le singolarità potessero essere tipiche delle soluzioni esatte note, perché altamente simmetriche e che in una situazione reale dove le simmetrie non sono matematicamente esatte, tali singolarità potrebbero non essere presenti. Per esempio se una stella viene supposta a simmetria perfettamente sferica, cosa che nella realtà non è possibile, se collapsa mantenendo tale simmetria, tutta la materia confluisce in un punto creando una densità infinita. In una situazione reale ciò potrebbe non avvenire. Una tale congettura farebbe sperare che future soluzioni meno simmetriche e più realistiche potrebbero essere prive di singolarità.

Tale congettura è stata dopo poco tempo confutata dai teoremi sulle singolarità di R. Penrose e S. Hawking, che, sotto ipotesi molto plausibili, quali la positività della densità di energia del campo materiale (gravità attrattiva) ed il verificarsi di certe condizioni quali l'esistenza di una **superficie chiusa intrappolata**,²² in generale affermano che le soluzioni delle equazioni di Einstein non sono geodeticamente complete.

²²È una superficie chiusa tale che, in qualunque direzione venga emesso da essa un raggio luminoso, esso converge sempre verso il suo interno; per esempio nella regione II dell'estensione di Kruskal dello spazio-tempo di Schwarzschild, ogni punto rappresenta una sfera che verifica tale condizione.

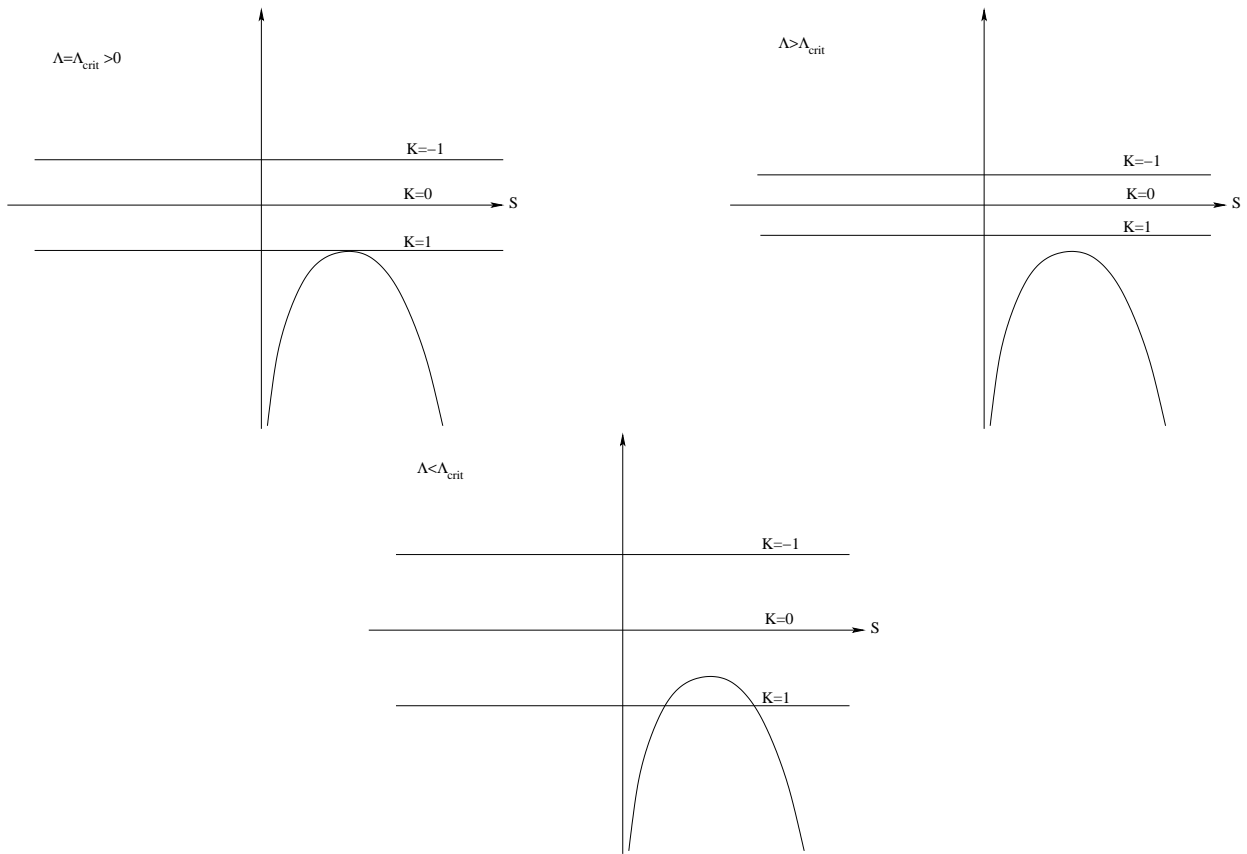


Figure 3.15: Grafico di $V(S)$ per $\Lambda > 0$ nel caso in cui il punto di stazionarietà di $V(S)$ corrisponde a $K = 1$ e negli altri possibili casi.

Quindi l'apparenza di singolarità in condizioni estreme delle materia, non deriva dalle simmetrie delle soluzioni esatte note, ma è una patologia della teoria. Il motivo per cui la teoria fallisce, si ritiene dovuto al fatto che, in simili situazioni estreme, non si può non tenere conto degli effetti quantistici, quindi si presume che una teoria quantistica della gravità sia esente da singolarità.

Purtroppo tale teoria non esiste e malgrado i numerosi tentativi, negli ultimi decenni, di *quantizzare la gravità*, ci si è sempre trovati di fronte a teorie non *rinormalizzabili*. Questo può essere spiegato o con il fatto che la strada per determinare una teoria della gravità rinormalizzabile, è così ben nascosta che ancora nessuno è riuscito a trovarla, o con il fatto che le due teorie sono *strutturalmente* incompatibili e che quindi bisogna fare dei cambiamenti drastici a livello dei fondamenti (matematici?) per poterle unificare.

Per inciso, bisogna dire che, pur non esistendo una teoria quantistica della gravità, in diverse occasioni, sono stati studiati, a livello semiclassico, effetti quantistici applicati alla gravità. Per esempio S. Hawking ha dimostrato che, se si tiene conto della meccanica quantistica, i buchi neri non sono così neri come prevede la teoria classica di Einstein, nel senso che essi possono emettere materia con continuità fino ad *evaporare*. Poiché questa emissione è tanto più consistente quanto più il buco nero è piccolo, tale previsione potrebbe essere applicata ad eventuali mini buchi neri formati al tempo del big-bang. Per buchi neri più grandi quali quelli generati dal collasso gravitazionale di una stella, tale processo è così lento, che il tempo necessario per l'evaporazione supera l'età dell'universo, quindi in questo caso gli effetti quantistici sono trascurabili e la discussione fatta precedentemente nell'ambito di una teoria non quantistica resta perfettamente valida.