

Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 23/11/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

Nello spazio siano dati la retta

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 2 = 0 \end{cases}$$

il piano $\pi : 2x + y - z = 0$ ed il punto $P = (1, 1, 1)$.

Scrivere le equazioni cartesiane della retta s passante per P , ortogonale ad r e parallela a π .

II

In \mathbb{R}^4 è dato il sottospazio $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$, dove $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, -1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$.

Sia $f : V \rightarrow V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h + 1, h + 3, 3, 2) \\ f(v_2) &= (0, 1, h, 1) \\ f(v_3) &= (0, 1 - h, -h, 1 - h). \end{aligned}$$

Sia $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ la matrice di f associata alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ di V . Studiare M al variare del parametro h trovando una base e le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$ come sottospazi di \mathbb{R}^4 .

Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui f è semplice, determina una base di autovettori.

Determinare $f^{-1}(1, 1, -1, 0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

III

Determina e studia il fascio di coniche aventi in $P = (-1, 0)$ la retta tangente $x + y + 1 = 0$ e passanti per i punti $A = (0, 0)$ e $B = (0, 1)$.

Ci sono circonferenze nel fascio? Determina inoltre la forma canonica ed il centro dell'iperbole equilatera del fascio.

IV

Studia il fascio di quadriche

$$xy - y^2 - xz + z^2 - z + kyz = 0 ,$$

al variare del parametro reale k .

Sia Q la quadrica del fascio ottenuta per $k = 0$. Determinare, tra i piani passanti per l'asse \vec{z} , quelli che secano Q in una parabola.