

Università di Catania  
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 05/10/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

In  $\mathbb{R}^4$  sono dati i sottospazi:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x - y + z + t = 0\},$$

$$U_h = \langle (h - 1, 1, 2, 1), (1, h - 1, -3, 0) \rangle$$

con  $h$  parametro reale.

Determina, per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ , i sottospazi  $U_h \cap V$  e  $U_h + V$ .

II

In  $\mathbb{R}^4$  è dato il sottospazio  $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ , dove  $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $v_3 = (0, -2, 0, 1)$ .

Sia  $f : V \rightarrow V$  l'endomorfismo definito da

$$f(v_1) = (h, h, 0, 0)$$

$$f(v_3) = (-h - 1, 1 - h, 0, -1)$$

e tale che  $v_2$  sia un autovettore associato all'autovalore 1.

Sia  $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$  la matrice di  $f$  associata alla base  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$  di  $V$ . Studiare  $M$  al variare del parametro  $h$  trovando una base e le equazioni cartesiane di  $Imf$  e  $Kerf$  come sottospazi di  $\mathbb{R}^4$ .

Studiare la semplicità di  $f$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ . Nei casi in cui  $f$  è semplice, determina una base di autovettori.

III

Determina e studia il fascio di coniche aventi asse di simmetria la retta  $x - y = 0$  e passanti per i punti  $A = (1, 1)$  e  $B = (0, 3)$ .

Ci sono circonferenze nel fascio? Determina inoltre la forma canonica ed il centro dell'iperbole equilatera del fascio.

IV

Studia il fascio di quadriche

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + kz^2 + 2z - 2 = 0,$$

al variare del parametro reale  $k$ .

Sia  $Q$  la quadrica del fascio ottenuta per  $k = 0$ . Studiare le sezioni di  $Q$  con i piani  $y = mz$ , con  $m \in \mathbb{R}$ .