

Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 09/03/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

- 1) Nel piano $z = 0$, sia \mathcal{C} la circonferenza di centro l'origine $O = (0, 0)$ e raggio 1 e sia \wp la parabola tangente in O e passante per i punti $A = (2, 4)$ e $B = (-2, 4)$. Studiare il fascio di coniche generato da \mathcal{C} e da \wp .
- 2) Nello spazio, studiare il seguente fascio di quadriche

$$x^2 + hy^2 + z^2 + 2(h-1)xz + 4y - 2hz + 1 = 0$$

- 3) Nello spazio, siano date le rette di equazione $r \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ ed $s \begin{cases} 2x - z + 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$. Provare che r ed s sono complanari e trovare il piano π che le contiene. Trovare la retta u che passa per $A = (1, -1, 1)$ e perpendicolare a π .

II

1. In \mathbb{R}^4 siano dati i sottospazi $U_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (h+1)x + hy + ht = y + t = 0\}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0\}$ con $h \in \mathbb{R}$. Trovare $U_h \cap V$ e $U_h + V$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. In \mathbb{R}^3 siano dati i seguenti vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(v_1) = (2h - 1, h - 1, 2) \quad (1)$$

$$f(v_2) = (h, -h, h) \quad (2)$$

$$f(v_3) = (h - 1, -1, 2 + h) \quad (3)$$

con h parametro reale.

- a) Trovare $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ la matrice di f associata alla base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 . Studiare f al variare del parametro h trovando una base per $Im f$ e $Ker f$.
- b) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice, trovare una base di autovettori di f .
- c) Trovare $f^{-1}(1, -1, 0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.