

Università di Catania  
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 07/09/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

In  $\mathbb{R}^4$  è dato il sottospazio:

$$U_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - (h-1)y + (h-2)z + t = -(h+1)x + y - t = 0\},$$

con  $h$  parametro reale. Determina, per ogni valore di  $h \in \mathbb{R}$ , una base di  $U_h$  e del sottospazio ortogonale di  $U_h$ . Trova i sottospazi  $\bigcap_h U_h$  e  $\sum_h U_h$ .

II

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 0, 0) \\ f(e_2) &= (h, 1, 1+h) \\ f(e_3) &= (1, 3h, 2h). \end{aligned}$$

Sia  $M := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$  la matrice di  $f$  associata alla base canonica  $\mathcal{E}$  di  $\mathbb{R}^3$ . Studiare  $M$  al variare del parametro  $h$  trovando una base e le equazioni cartesiane di  $Imf$  e  $Kerf$ .

Dire per quali valori di  $h$  l'endomorfismo  $f$  è semplice.

Sia  $h = 1$ . Dire se  $f$  è semplice e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante  $P$ .

III

Determina e studia il fascio di coniche che osculano la conica  $\Gamma : x^2 + 4xy - y^2 - 2x + 1 = 0$  nel punto  $A = (1, 0)$  e che passano per  $B = (0, -1)$ .

Classificare  $\Gamma$  e determinare la forma canonica della conica del fascio passante per il punto  $C = (2, -1)$ .

IV

Studia il fascio di quadriche

$$(2k-2)x^2 + 2kxy + 2x + ky^2 - 2z^2 + 1 = 0,$$

al variare del parametro reale  $k$ .

Sia  $Q$  la quadrica del fascio ottenuta per  $k = 2$ . Caratterizza i piani che secano  $Q$  in una parabola.