Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**
Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 06/04/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Nel piano $z = 0$, determinare e studiare il fascio di coniche tali che le rette $r_1 : x - 3y - 1 = 0$ e $r_2 : 3x - y + 1 = 0$ siano loro tangenti nei punti in cui esse sono incontrate dalla retta $t : x + y - 1 = 0$. In particolare, si determinino la circonferenza, liperbole equilatera e la parabola del fascio

2) Nello spazio, al variare di $h \in \mathbb{R}$, studiare il seguente fascio di quadriche
$$hy^2 + z^2 + (1-h)yz - x = 0$$

3) Nello spazio, siano date le rette di equazione $r \quad \begin{cases} z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$ ed $s \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. Provare che r ed s sono sghembe. Determinare la retta t perpendicolare ad entrambe le rette e calcolare la distanza tra r ed s.

II

1. In $\mathbb{R}^4$ siano dati i sottospazi $U = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_2)$ dove $v_1 = (1, 0, 1, -1)$, $v_2 = (h, 1, 0, 1)$, $v_3 = (0, -h, 1, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$ e $V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z = t = 0\}$.

   Verificare che $\mathbb{R}^4 = U + V$ per ogni $h \in \mathbb{R}$. Determinare il valore di $h \in \mathbb{R}$ tale che $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$

2. In $\mathbb{R}^3$ sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da
$$f(e_1) = (1-h, 0, 0) \quad (1)$$
$$f(e_2) = (1-2h, h, 0) \quad (2)$$
$$f(e_3) = (1-3h, h-1, 1) \quad (3)$$
   con h parametro reale.

   a) Sia $M := M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ la matrice di f associata alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Studiare M al variare del parametro h trovando una base e le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$.
   b) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice, trovare una base di autovettori di f.
   c) Trovare $f^{-1}(1, 0, -1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.