

Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 25/11/2015

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

- 1) Nel piano, determinare e studiare il fascio di coniche aventi come asse di simmetria la retta $t: x - y = 0$ e passanti per l'origine e $B = (3, 0)$. Dire se ci sono circonferenze ed, in tal caso, trovarne centro e raggio.
- 2) Nello spazio, studiare il seguente fascio di quadriche:

$$\Psi: x^2 - y^2 - h^2 z^2 - xy + 2yz + 2y = 0$$

con h parametro reale.

- 3) Nello spazio, provare che le rette $r: \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ -y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ sono complanari e scrivere l'equazione del piano che le contiene.

II

Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(x, y, z) = ((h - 1)x + hy + (4 + 2h)z, 4y + z, -y + 2z) \quad (1)$$

con h parametro reale.

1. Sia $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ la matrice di f associata alla base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 . Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$. Trovarne le equazioni cartesiane.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice trovare una base di autovettori di f .
3. Trovare $f^{-1}(1, 0, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.