

Università di Catania  
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 29/06/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

- a) Nel piano è assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $O, \vec{x}, \vec{y}$ . Determina e studia il fascio di coniche tangenti alla retta  $y = 0$  nel punto  $O = (0, 0)$  e alla retta  $x - 2y + 1 = 0$  in  $P_\infty = (2, 1, 0)$ .
- b) Nello spazio, studiare il fascio di quadriche  $x^2 + y^2 - 1 + hz(z - 2) = 0$ .  
Sia  $Q$  la quadrica ottenuta per  $h = 0$ . Dire se  $Q$  ha sezioni piane irriducibili che siano iperboli, ellissi o parabole, giustificando la risposta.  
Caratterizzare i piani che secano  $Q$  in ellissi.
- c) Dato il piano  $\pi : x - y + z - 2 = 0$  e il punto  $P = (1, 2, 0)$ , calcolare il punto  $Q$  simmetrico di  $P$  rispetto al piano  $\pi$ .

II

Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'endomorfismo la cui matrice rispetto alla base canonica è definita da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & h+3 \\ 0 & h+1 & 0 \\ 0 & h & -2 \end{pmatrix} \text{ con } h \text{ parametro reale.}$$

- a) Studiare  $f$  al variare del parametro  $h$  trovando una base ed equazioni cartesiane per  $Imf$  e  $Kerf$ .  
Per  $h = -1$  la somma  $Imf + Kerf$  è diretta?
- b) Studiare la semplicità di  $f$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ . Nei casi in cui è semplice, trovare una base di autovettori di  $f$ .
- c) Trovare  $f^{-1}(3, 2, 0)$  al variare di  $h \in \mathbb{R}$ .

III

Determina il sottospazio ortogonale del seguente sottospazio vettoriale  $V$  rispetto al prodotto scalare euclideo su  $\mathbb{R}^3$ :

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}.$$