

Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**

Prova scritta di **Geometria I** assegnata il 20/07/2016

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

- a) Determina e studia il fascio di coniche che iperosculano la conica $\Gamma : x^2 + y^2 - xy + y = 0$ nel punto $P = (-1, -1)$. Determina una forma canonica della conica del fascio passante per il punto $Q = (\frac{1}{3}, 1)$.
- b) Classifica la quadrica $Q : x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + x = 0$.
Caratterizza i piani che secano Q in una parabola.
- c) Scrivere la sfera passante per $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$, $O = (0, 0, 0)$. Trova centro e raggio di tale sfera. Dire se la sezione della sfera col piano $\pi : x + y - z = 0$ è una circonferenza e, in caso affermativo, trova centro e raggio di tale circonferenza.

II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (1, 0, 0) \\ f(e_2) &= (h, 1, 1 - \frac{9}{8}h) \\ f(e_3) &= (1, 2h, 2h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

- a) Sia $M := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ la matrice di f associata alla base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 . Studiare M al variare del parametro h trovando una base e le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$.
- b) Dire per quali valori di h l'endomorfismo f è semplice.
- c) Sia $h = \frac{1}{3}$. Dire se f è semplice e, in caso affermativo, trovare la matrice diagonalizzante P .

III

Determina il sottospazio ortogonale del sottospazio vettoriale U rispetto al prodotto scalare canonico di \mathbb{R}^3 :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}.$$