Università di Catania
Corso di laurea in **Matematica**
Prova scritta di **Geometria I** assegnata l' 8/2/2017

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.

I

a) Nello spazio siano dati i punti $P(3, 2, 1)$ e $Q(2, 2, 4)$ e le rette:

$$r : \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases} .$$

Determina la posizione reciproca di r ed s. Scrivi le equazioni cartesiane della retta r' passante per P e incidente sia r che s. Scrivi l'equazione cartesiana del piano π passante per Q e parallelo a r ed s.

b) Nel piano è assegnato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}$. Determina e studia il fascio di coniche tangenti alla retta $x + y = 0$ nel punto $O = (0, 0)$ e tangenti alla retta $x + y + 1 = 0$ nel punto $A = (-2, 1)$. Ci sono circonferenze nel fascio? Trovare la forma canonica ed il centro dell'iperbole equilatera del fascio.

c) Nello spazio, studiare il seguente fascio di quadriche:

$$x^2 + ky^2 + 2x + 2ky + (k + 1)z^2 + 2z = 0 \quad , \quad k \in \mathbb{R}.$$

II

Sia $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(1 + x^2) = 1 + x^2 \quad f(1 - x^2) = -x^2 + 2x + 3 \quad f(1 + x) = x^2 + 2x + 5.$$

Verificare che tale applicazione lineare è ben definita, cioè che i vettori $1 + x^2$, $1 - x^2$, $1 + x$ formano una base per $\mathbb{R}[x]_2$. Determinare inoltre la dimensione e una base per Imf e $Kerf$.

III

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(e_1) = (h, 0, 0) \quad f(e_2) = (h, 1, h) \quad f(e_3) = (0, 1 - h, 2h)$$

con h parametro reale.

a) Sia $M := M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ la matrice associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Dire per quali valori di h f è semplice. In tali casi, trovare una base di autovettori di f.

c) Trovare $f^{-1}(0, 1, 0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.