Università di Catania

Corso di laurea in **Matematica**

Prima prova in itinere di Geometria I assegnata l' 8/02/2017

- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

In $\mathbb{R}^4$ sia dato il sottospazio

$$V_h = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - (h+2)y + (h+1)z + t = (h-2)x + y - t = 0\},$$

con h parametro reale.

1. Determinare una base di V_h e di $V_h^{\perp}$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.
2. Determinare i sottospazi $\sum_h V_h$, $\bigcap_h V_h$ e trovarne una base.

II

In $\mathbb{R}^3$ siano dati i seguenti vettori $v_1 = (1, 2, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (2, 0, 1)$. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$f(v_1) = (3h, 2, 2h) \quad f(v_2) = (h, 2-h, 3h) \quad f(v_3) = (2h, 1-h, 2h)$$

con h parametro reale.

1. Trovare la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ associata ad f rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$. Studiare f al variare del parametro h trovando una base e le equazioni cartesiane per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice, trovare una base di autovettori di f.
3. Trovare $f^{-1}(0, 1, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

III

Sia $f : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}[x]_2$ l'applicazione lineare definita da:

$$f(1 + x^2) = 1 + x^2 \quad f(1 - x^2) = -x^2 + 2x + 3 \quad f(1 + x) = x^2 + 2x + 5.$$

Verificare che tale applicazione lineare è ben definita, cioè che i vettori $1+x^2$, $1-x^2$, $1+x$ formano una base per $\mathbb{R}[x]_2$. Determinare inoltre la dimensione e una base per Imf e $Kerf$.

IV

Sia U sottospazio di $\mathbb{R}^4$, $dimU = 3$. Sia $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base di U, con $u_1 = (1, 1, 0, -1), u_2 = (1, 2, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1, 1)$.

1. Determinare una base ortonormale $\overline{\mathcal{B}}$ di U utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt a partire dalla base $\mathcal{B}$.
2. Determinare la matrice associata al prodotto scalare euclideo (ristretto al sottospazio U di $\mathbb{R}^4$) rispetto alla base $\mathcal{B}$ di U.

V

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo e sia A la matrice ad esso associata rispetto a una base di V. Dimostrare che se $\underline{\alpha}$ è soluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$, allora ogni $\underline{y} \in \underline{\alpha} + Kerf$ è soluzione del sistema $A\underline{x} = \underline{b}$.