FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria per l'Ambiente ed il Territorio**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 26/09/2003

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Si possono consultare solo i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti in O alla retta $x - y = 0$ e passanti per i punti $A = (1, -1)$ e $B = (0, 1)$.

2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Trovare una sua forma canonica.

II

Studiare il seguente fascio di quadriche

$$x^2 + y^2 + z^2 + hxy - 3h - 1$$

al variare del parametro reale h.

III

In $\mathbb{R}^3$, siano dati i seguenti vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h + 1, h - 2, h) \\ f(v_2) &= (h + 1, 0, 0) \\ f(v_3) &= (h + 2, h + 1, h + 1) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di h.

Soluzione

I

La retta OA ha equazione $x + y = 0$, la retta OB ha equazione $x = 0$, la retta AB ha equazione $2x + y - 1 = 0$pertanto il fascio di coniche richiesto è il seguente:

$$\phi : \quad (h+2)x^2 - y^2 + (h-1)xy - x + y = 0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h+2} & \frac{h-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{h-1}{2} & \text{-1} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{h}{2}$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow h = 0$. In tal caso ϕ si spezza nelle due rette $(x-y)(2x+y-1) = 0$ (Ricordiamo che per $h = \infty$, si ottiene la conica spezzata nelle rette $x(x+y) = 0$).

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h+2} & \frac{h-1}{2} \\ \frac{h-1}{2} & \text{-1} \end{vmatrix} = -\frac{h^2+2h+9}{4}$$

si ha: $|A| < 0$ sempre e si hanno solo iperboli.
L'iperbole equilatera del fascio si ottiene per $h = -1$ ed è $\mathcal{I} : x^2 - y^2 - 2xy - x + y = 0$. Essendo $|B| = \frac{1}{2}$, e gli autovalori ralativi alla sottomatrice A uguale a $\pm\sqrt{2}$ si ha che una forma canonica di $\mathcal{I}$ è la seguente:

$$4\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}y^2 = 1$$

II

Il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi : \; x^2 + y^2 + z^2 - hxy - 3h - 1 = 0$$

Quindi

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ \frac{h}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{-3h-1} \end{vmatrix} = (-3h-1)(\frac{4-h^2}{4}$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4-h^2}{4}$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{1}{3}, \pm 2$. Se $h = -\frac{1}{3}$,allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| \neq 0$, la quadrica è il cono:

$$\Psi : \; 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - xy = 0$$

Se $h = -2$,allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = 0$, la quadrica è il cilindro:

$$\Psi : \; x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 5 = 0$$

Se $h = 2$,allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = 0$, la quadrica è il cilindro:

$$\Psi : \; x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 7 = 0\,.$$

Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq -\frac{1}{3}, \pm 2$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$, non si hanno paraboloidi, ma solo iperboloidi e/o ellissoidi. A tale scopo, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| = \begin{vmatrix} \text{1-T} & \frac{h}{2} & 0 \\ \frac{h}{2} & \text{1-T} & 0 \\ 0 & 0 & \text{1-T} \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - T)(T^2 - 2T + \frac{4 - h^2}{4})$$

e dalla regola di Cartesio si trova che

1. se $-2 < h < 2$ allora si hanno ellissolidi;
2. se $h < -2 \vee h > 2$ si sono iperboloidi ellittici.

III

Scriviamo la matrice di f associata alla base canonica

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \text{h-2} \\ 0 & 1 & \text{h} \end{vmatrix} = 2(h + 1)^2$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq -1$ ed in tal cas0 f è un isomorfismo.
Sia $h = -1$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(1, 3, 1), (0, -3, -1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1, 0, 0)\} = e_1$.

Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A}-IT| = \begin{vmatrix} \text{h+1-T} & 1 & 0 \\ 0 & \text{3-T} & \text{h-2} \\ 0 & 1 & \text{h-T} \end{vmatrix} = (h{+}1{-}T)\left(T^2 + (3+h)T + h^2 + 2h + 2\right) =$$

$$= -(T-h-1)^2(T-2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h+1, \quad \text{contato due volte}, \quad T_2 = 2\,.$$

Si ha

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \text{ per } h \neq 1$$

Calcoliamo V_{h+1}, essendo in questo caso il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-h & h-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e uguale a 2 si ha che f per $h \neq 1$ non è semplice.
Sia $h = 1$ si ha l'autovalore $T = 2$ triplo. Calcoliamo V_2, essendo in questo caso il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e uguale a 2 si ha che f per $h \neq 1$ non è semplice.
Questo esercizio si può svolgere scrivendo la matrice di f associata alla base $\mathcal{B}$ generata da v_1, v_2 e v_3

$$|\mathcal{A}'| = |\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \text{h+1} & 1 \\ \text{h-2} & 0 & \text{h+1} \end{vmatrix} = 2(h+1)^2$$