UNIVERSITA' DI CATANIA

Corso di laurea in **Ingegneria Edile e Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 17/04/2015

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.
- Appello riservato a ripetenti e fuori corso

I

1) Scrivere e studiare il fascio di coniche passanti per $A(-1,1)$, $B(0,\frac{1}{2})$, $C(-1,0)$ e per $D(0,1)$;

2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Scrivere una sua forma canonica

3) Studiare il seguente fascio di quadriche:

$$\Psi : x^2 + 16y^2 + 2\rho xz - 8xy + 9x - 24y - 2\rho z + 8 = 0$$

II

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1,1,0,0)$, $v_2 = (0,1,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1,1)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2h-1, 4h-1, 2h, 0) \\ f(v_2) &= (1, 1-h, 0, h) \\ f(v_3) &= (1,1,0,0) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice trovare una base di autovettori di f.

Soluzione

I

Siano $A(-1,1)$, $B(0,\frac{1}{2}), C(-1,0)$ e $D(0,1)$; sia C_1 la conica spezzata nelle due rette AC e BD; sia C_2 la conica spezzata nelle due rette AD e BC; pertanto il fascio di coniche è il seguente:

$$\phi : \quad \lambda x(x+1) + \mu(y-1)(x-2y+1) = 0\,,$$

ovvero

$$kx^2 - 2y^2 + xy + (k-1)x + 3y - 1 = 0\,,$$

dove $k = \frac{\lambda}{\mu}$.

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{k} & \frac{1}{2} & \frac{k-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{-2} & \frac{3}{2} \\ \frac{k-1}{2} & \frac{3}{2} & \text{-1} \end{vmatrix} = \frac{k}{2}(k-1)$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow k = 0, 1$, e ϕ si spezza nelle due rette $(y-1)(x-2y+1) = 0$ per $k = 0$; ϕ si spezza nelle due rette $(x-y+1)(x+2y-1) = 0$ per $k = 1$;

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0, 1$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{k} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{-2} \end{vmatrix} = -\frac{8k+1}{4}$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$ e si ha una parabola $\wp :\ x^2 + 16y^2 - 8xy + 9x - 24y + 8$ $|A| > 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{8}$ e si hanno ellissi. In particolare non si hanno circonferenze. $|A| < 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{8}$ e si hanno iperboli. Essendo $Tr(A) = 0 \Leftrightarrow k = 2$, si ha l'iperbole equilatera $\mathcal{I} :\ 2x^2 - 2y^2 + xy + x + 3y - 1 = 0$
Una sua forma canonica è $\sqrt{17}/2X^2 - \sqrt{17}/2Y^2 = 4/17$
2) Il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi : x^2 + 16y^2 + 2\rho xz - 8xy + 9x - 24y - 2\rho z + 8 = 0$$

Quindi

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \text{-4} & \rho & \frac{9}{2} \\ \text{-4} & 16 & 0 & \text{-12} \\ \rho & 0 & 0 & -\rho \\ \frac{9}{2} & \text{-12} & \text{-}\rho & 8 \end{vmatrix} = 32\rho^2$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \text{-4} & \rho \\ \text{-4} & 16 & 0 \\ \rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = -16\rho^2$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$. Se $\rho = 0$, allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = 0$, la quadrica è un cilindro.
Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0$. In tal caso, essendo $|B| > 0$ sempre si hanno solo iperbolidi iperbolici (non si hanno paraboloidi). Un altro metodo per stabilire se ci sono iperboloidi e/o ellissoidi, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| == -T^3 + 17T^2 + \rho^2 T - 16\rho^2$$

e dalla regola di Cartesio si trova che si hanno sempre iperboloidi iperbolici

II

Sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_2\}$ una base di V. Si ha

$$|M| = |\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{2h-1} & 1 & 1 \\ \text{2h} & \text{-h} & 0 \\ 0 & \text{h} & 0 \end{vmatrix} = 2h^2$$

Quindi:
$|M| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ ed in tal caso f è un isomorfismo.
Sia $h = 0$. In tal caso si ha:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e $rkM = 1$. Pertanto $\dim Imf = 1$ ed una base è data da $\{(1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = v_1\}$; $\dim Kerf = 2$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in V \mid x - y - z = 0\}$, pertanto una base è data da $[w_1, w_2]$, dove $w_1 = (1, 1, 0)_{\mathcal{B}} = (1, 2, 1, 0)$ e $w_2 = (1, 0, 1)_{\mathcal{B}} = (1, 1, 1, 1)$
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|M - IT| = \begin{vmatrix} \text{2h-1-T} & 1 & 1 \\ \text{2h} & \text{-h-T} & 0 \\ 0 & \text{h} & \text{-T} \end{vmatrix} = (h + T)[T(2h - 1 - T) + 2h] =$$

$$= (h + T)(T + 1)(T - 2h)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = -h, \quad T_2 = -1, \quad T_3 = 2h$$

ed essendo

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \Leftrightarrow h \neq -\frac{1}{2}, 0, 1$$

in tal caso f ha tre autovalori distinti e, quindi, f è semplice.

Si ha:

$$V_{-h} = \{(x, y, z) \in V \mid x = 0, y = -z =$$
$$= \mathcal{L}\left((0, -z, z)_{\mathcal{B}}.\right)$$

ed una base di V_1 è data dal vettore $a_1 = (0, 1, -1)$.

$$V_{-1} = \{(x, y, z) \in V \mid x = \frac{h-1}{2h} y, z = -hy\} = \mathcal{L}\left((\frac{h-1}{2h} y, y, -hy)_{\mathcal{B}} \right)$$

ed una base di V_{-1} è data dal vettore $a_2 = (h-1, 2h, -2h^2)_{\mathcal{B}}$.

$$V_{2h} = \{(x, y, z) \in V \mid x = 3z, y = 2z\} = \mathcal{L}\left((3z, 2z, z)_{\mathcal{B}}\right)$$

ed una base di V_{2h} è data dal vettore $a_3 = (3, 2, 1)_{\mathcal{B}}$. Pertanto per $h \neq -\frac{1}{2}, 0, 1$ una base di autovettori per f è $\mathcal{A} = [a_1, a_2, a_3]$
Sia adesso $h = -\frac{1}{2}$. Si ha l'autovalore $T_1 = -1$ con $m_{-1} = 2$ e $T_2 = \frac{1}{2}$ con $m_{\frac{1}{2}} = 1$; Sia $h = -\frac{1}{2}$, per $T = \frac{1}{2}$ il rango di $M + \frac{1}{2}I$ è due e quindi $dimV_{\frac{1}{2}} = 1 = m_{-\frac{1}{2}}$; ma per $T = -1$ il rango di $M + I$ è uguale a due e quindi $dimV_{-1} = 1 \neq m_{-1}$; allora in questo caso f non è semplice.
Sia adesso $h = 0$. Si ha l'autovalore $T_1 = -1$ con $m_{-1} = 1$ e $T_2 = 0$ con $m_0 = 2$; Sia $h = 0$, per $T = -1$ il rango di $M + I$ è due e quindi $dimV_{-1} = 1 = m_{-1}$; per $T = -1$ il rango di M è uno e quindi $dimV_0 = 2 = m_0$; allora in questo caso f è semplice. Una base di $V_0 = Kerf$ è data da $[a_1, a_2]$ con $a_1 = (1, 1, 0)$ e $a_2 = (1, 0, 1)$. Si ha $V_{-1} = \mathcal{L}(a_3)$ con $a_3 = (1, 0, 0)$ Pertanto per $h = 0$ una base di autovettori per f è $\mathcal{A} = [a_1, a_2, a_3]$
Sia adesso $h = 1$. Si ha l'autovalore $T_1 = -1$ con $m_{-1} = 2$ e $T_2 = 2$ con $m_2 = 1$; Sia $h = 1$, per $T = 2$ il rango di $M - 2I$ è due e quindi $dimV_2 = 1 = m_2$; ma per $T = -1$ il rango di $M + I$ è uguale a due e quindi $dimV_{-1} = 1 \neq m_{-1}$; allora in questo caso f non è semplice.