Corso di laurea in **Ingegneria Edile Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 27/02/2014

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti in O alla retta $x - y = 0$ e passanti per i punti $A = (1, -1)$ e $B = (0, 1)$.

2) Sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Trovare il cilindro di vertice $V(1, 0, 1, 0)$ e direttrice $\mathcal{I}$.

3) Nello spazio siano date le rette

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$$

Dopo aver verificato che queste rette sono sghembe si determini la retta t incidente ortogonalmente entrambe le rette r ed s.

II

In $\mathbf{R}^3$, siano dati i seguenti vettori $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h + 1, h - 2, h) \\ f(v_2) &= (h + 1, 0, 0) \\ f(v_3) &= (h + 2, h + 1, h + 1) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Scrivere la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ dove $\mathcal{E}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbf{R}$.

Soluzione

I

La retta OA ha equazione $x+y=0$, la retta OB ha equazione $x=0$, la retta AB ha equazione $2x+y-1=0$pertanto il fascio di coniche richiesto è il seguente:

$$\phi: \quad (h+2)x^2-y^2+(h-1)xy-x+y=0.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h+2} & \frac{h-1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{h-1}{2} & \text{-1} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{h}{2}$$

Allora

1. $|B|=0 \Leftrightarrow h=0$. In tal caso ϕ si spezza nelle due rette $(x-y)(2x+y-1)=0$ (Ricordiamo che per $h=\infty$, si ottiene la conica spezzata nelle rette $x(x+y)=0$).

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h+2} & \frac{h-1}{2} \\ \frac{h-1}{2} & \text{-1} \end{vmatrix} = -\frac{h^2+2h+9}{4}$$

si ha: $|A|<0$ sempre e si hanno solo iperboli.
L'iperbole equilatera del fascio si ottiene per $h=-1$ ed è $\mathcal{I}: x^2-y^2-2xy-x+y=0$ ..
Per scrivere il cilindro:

$$z(ax+by+cz+d)+x^2-y^2-2xy-x+y=0$$

imponendo che $V(1,0,1,0)$ sia vertice, ovvero che deve essere soluzione del sistema lineare omogeneo $BV=0$, si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \text{a/2} & \text{-1/2} \\ -1 & -1 & \text{b/2} & 1/2 \\ \text{a/2} & \text{b/2} & \text{c} & \text{d/2} \\ \text{-1/2} & 1/2 & \text{d/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{cases} 1+a/2 & =0 \\ -1+b/2 & =0 \\ a/2+c & =0 \\ -1/2+d/2 & =0 \end{cases} \text{ovvero} \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=1 \end{cases}$$

Pertanto $\mathcal{C} = -2xz+2yz+z^2+dz+x^2-y^2-2xy-x+y=0$

II

Scriviamo la matrice di f associata alla base canonica

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 1 & 0 \\ 0 & 3 & \text{h-2} \\ 0 & 1 & \text{h} \end{vmatrix} = 2(h+1)^2$$

Quindi:
$|\mathcal{A}| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq -1$ ed in tal cas0 f è un isomorfismo.
Sia $h = -1$. In tal caso si ha:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $\{(1,3,1),(0,-3,-1)\}$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$, pertanto una base è data da $\{(1,0,0)\} = e_1$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbf{R}$. Calcoliamo

$$|\mathcal{A}-IT| = \begin{vmatrix} \text{h+1-T} & 1 & 0 \\ 0 & \text{3-T} & \text{h-2} \\ 0 & 1 & \text{h-T} \end{vmatrix} = (h+1-T)\left(T^2 + (3+h)T + h^2 + 2h + 2\right) =$$

$$= -(T-h-1)^2(T-2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h+1, \quad \text{contato due volte}, \quad T_2 = 2\,.$$

Si ha

$$T_1 \neq T_2 \text{ per } h \neq 1$$

Pertanto per $h \neq 1$ f è semplice se e solo se

$$\begin{cases} \dim V_{h+1} = 2 \\ \dim V_2 = 1 \end{cases}$$

Calcoliamo V_{h+1}, essendo in questo caso il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2-h & h-2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e uguale a 2 si ha che f per $h \neq 1$ non è semplice.
Sia $h = 1$ si ha l'autovalore $T = 2$ triplo. Pertanto per $h = 1$ f è semplice se e solo se $\dim V_2 = 3$. Calcoliamo V_2, essendo in questo caso il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

uguale a 2, si ha che f per $h \neq 1$ non è semplice.