FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Edile Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 12/07/2013

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(1 + k)x^2 - ky^2 + 2xy + (4 + 4k)x = 0$$

con k parametro reale. In particolare trovare punti base e coniche spezzate.

2) sia $\mathcal{I}$ l'iperbole equilatera del fascio. Determinare il cilindro $\mathcal{C}$ avente vertice $(0, 0, 1, 0)$ e direttrice $\mathcal{I}$

II

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(e_1) &= (h + 1, -1, 2) \\ f(e_2) &= (0, 1 - h, 1) \\ f(e_3) &= (0, 1, 1 - h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f, e nei casi in cui è semplice determinare una base di autovettori.
3. Trovare $f^{-1}(1, 0, 1)$ al variare di h

Soluzione

I

Il fascio richiesto è il seguente:

$$x^2 + 2xy + y^2 + h(y^2 + 2y) = 0\,.$$

Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \text{h+1} & \text{h} \\ 0 & \text{h} & 0 \end{vmatrix} = -h^2$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow h = 0$. In tal caso ϕ si spezza nelle due rette $x + y = 0$ e $x - y = 0$.

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \text{h+1} \end{vmatrix} = h$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow h = 0$ e non si hanno parabole.
$|A| > 0$ per $h > 0$ e si hanno ellissi. Non si hanno circonferenze. $|A| < 0$ per $h < 0$ e si hanno iperboli. Si ha un'iperbole equilatera per $h = -2$.
III) Studiamo il fascio di quadriche

$$\Psi:\ hx^2 + (h-1)y^2 + (1+h)z^2 + 2x - 1 = 0$$

Quindi1

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \text{h-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{1+h} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \text{-1} \end{vmatrix} = -(h-1)(h+1)^2$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h} & 0 & 0 \\ 0 & \text{h-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{1+h} \end{vmatrix} = h(h-1)(h+1)$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow h = 1, -1$. In entrambi i casi $rk(B) = 3$ e $|A| = 0$ e la quadrica è un cilindro.
Per $h = 0$, si ha $B \neq 0$ e $|A| = 0$ e la quadrica è un paraboloide.
Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 1, -1$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$ per $h \neq 0$, si hanno iperboloidi e/o ellissoidi. A tale scopo, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio

caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & 0 & 0 \\ 0 & \text{h-1-T} & 0 \\ 0 & 0 & \text{1+h-T} \end{vmatrix} =$$

$$= (h-T)(h-1-T)(1+h-T)$$

e dalla regola di Cartesio si trova che per $h < -1$ ed $h > 1$ si hanno ellissoidi, e per $-1 < h < 1$ si hanno iperboloidi.

II

Si ha

$$|\mathcal{A}| = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 0 & 0 \\ \text{-1} & \text{1-h} & 1 \\ 2 & 1 & \text{1-h} \end{vmatrix} = -h(h+1)(2-h)$$

In particolare, se $h \neq -1, 0, 2$ f è un isomorfismo. Per $h = -1$ si ha $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(0, -1, 2), (0, 2, 1)]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -\frac{4}{5}z, x = -\frac{3}{5}z\}$, pertanto una base è data da $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 1)$.
Per $h = 0$ si ha $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(1, -1, 2), (0, 1, 1)]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z, x = 0\}$, pertanto una base è data da $(0, 1, -1)$.
Se $h = 2$ si ha $rk\mathcal{A} = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(3, -1, 2), (0, -1, 1)]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in r^3 \,|x = 0,\ y = z\}$, pertanto una base è data da $[(0, 1, 1)]$.
Calcoliamo adesso il polinomio caratteristico

$$|\mathcal{A} - IT| = \begin{vmatrix} \text{h+1-T} & 0 & 0 \\ \text{-1} & \text{1-h-T} & 1 \\ 2 & 1 & \text{1-h-T} \end{vmatrix} = (h-T)(-h-T)(2-h-T)$$

Si hanno i seguenti autovalori: $T_1 = h+1, T_2 = -h$ e $T_3 = 2-h$. Si hanno tre autovalori distinti se e solo se $h \neq \pm\frac{1}{2}$ In tal caso, f è semplice.
Per $h = \frac{1}{2}$, si ha $T = \frac{1}{2}$ doppio ed essendo $dimV_{\frac{1}{2}} = 1$, f non è semplice.
Per $h = -\frac{1}{2}$, si ha $T = \frac{3}{2}$ doppio ed essendo $dimV_{\frac{3}{2}} = 1$, f non è semplice.
La controimmagine del vettore $(1, 0, 1)$ si trova risolvendo il sistema

$$\begin{pmatrix} h+1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-h & 1 \\ 2 & 1 & 1-h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi se $h \neq -1, 0, 2$ si ha una sola soluzione. Per $h = -1, 0, 2$ il sistema è impossibile e quindi $f^{-1}(1, 0, 1)$ è l'insieme vuoto.