FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Edile Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 05/03/2011

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e/o appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

Nello spazio siano dati le due rette

$$r) : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{ed } s) : \begin{cases} z = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases}$$

1) Verificare che le due rette r ed s sono sghembe. Determinare le equazioni della retta t incidente ortogonalmente entrambe le rette r ed s.

2) Scrivere e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ bitangenti alla retta t (del punto precedente) nel punto $(-1, 0)$ ed alla retta $x + y = 0$ nel punto $(0, 0)$.

3) Studiare il seguente fascio di quadriche

$$hx^2 - y^2 + 1 + 2xy + x + hyz + 4y = 0$$

.

III

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1, -1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 2, 1)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (h + 1, -h - 1, 0, h + 1) \\ f(v_2) &= (0, h + 1, h + 2, 0) \\ f(v_3) &= (1 + 2h, h, 1 + 5h, 1 + 2h) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ con $\mathcal{B}$ una base di V, al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.

2. Studiare la semplicità di f, e nei casi in cui è semplice determinare una base di autovettori.

3. Trovare $f^{-1}(1, -2, -1, 1)$ al variare del parametro reale h

Soluzione

I

Mettendo a sistema le due rette r ed s si vede che il determinante ad esso associato è diverso da zero.
La retta t si puó pensare come la rette incidente r ed s e passante per il punto improprio P_∞ che individua la direzione ortogonale ad entrambe le rette. Il vettore direttivo della retta r è $v_r = (1, 0, -1)$ ed il vettore direttivo della retta s è $v_s = (1, 0, 0)$, pertanto il vettore direttivo (l, m, n) della retta t soddisfa le condizioni di perpendicolarità con v_r ed v_s, quindi $v_t = (0, 1, 0)$ e quindi $P_\infty = (0, 1, 0, 0)$. nel fascio di piani che per asse la retta r, scritto in coordinate omogenee perché dobbiamo imporre il passaggio per un punto improprio , cerchiamo il piano passante per $(0, 1, 0, 0)$. Si ottiene $x+z+1 = 0$. Analogamente, nel fascio di piani che per asse la retta s cerchiamo il piano passante per $(0, 1, 0, 0)$. Si ottiene $z = 0$. La retta t cercata é quella ottenuta come intersezione dei due piani trovati. Quindi

$$t) : \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \text{ovvero } t) : \begin{cases} z = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Il fascio richiesto ha equazione

$$\Phi : (x + y)(x + 1) + hy^2 = 0,$$

da cui

$$\Phi : x^2 + hy^2 + xy + x + y = 0.$$

pertanto

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{h} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{h}{4}$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow h = 0$. Per $h = 0$ si ha la conica spezzata nelle due rette $(x + y)(x + 1) = 0$
2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{h} \end{vmatrix} = h - \frac{1}{4}$$

Si ha: $|A| = 0 \Leftrightarrow h = \frac{1}{4}$. E si ha la parabola, $\wp = x^2 + \frac{1}{4}y^2 + xy + x + y = 0$ $|A| > 0 \Leftrightarrow h > \frac{1}{4}$ e si hanno ellissi. Nel nostro caso non si hanno circonferenze. $|A| < 0 \Leftrightarrow h < \frac{1}{4}$ e si hanno iperboli. In particolare, $TrA = 0 \Leftrightarrow h = -1$ e quindi si ha l'iperbole equilatera $\mathcal{I} := x^2 - y^2 + xy + x + y = 0$.

2) la matrice del fascio di quadriche è la seguente

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h} & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \text{-1} & \frac{h}{2} & 2 \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{h^2}{4}(h - \frac{1}{4})$$

e

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h} & 1 & 0 \\ 1 & \text{-1} & \frac{h}{2} \\ 0 & \frac{h}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{h^3}{4}$$

Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow h = 0, \frac{1}{4}$. Se $h = 0$ allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = 0$ la quadrica è il cilindro:$\Psi : -y^2 + 2xy + x + 4y + 1 = 0$.
Se $h = \frac{1}{4}$ allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| \neq 0$ la quadrica è il cono:Ψ : $\frac{1}{4}x^2 - y^2 + x + 2xy + \frac{1}{4}yz + 4y + 1 = 0$.
Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0, \frac{1}{4}$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| = 0 \Leftrightarrow h = 0$, non si hanno paraboloidi. Per sapere se ci sono iperboloidi e/o ellissoidi, studiamo il segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Quindi:

$$|A - IT| = \begin{vmatrix} \text{h-T} & 1 & 0 \\ 1 & \text{-1-T} & \frac{h}{2}, \\ 0 & \frac{h}{2} & \text{-T} \end{vmatrix} =$$

$$= -T^3 + (h-1)T^2 + (\frac{h^2}{4} + h + 1)T - \frac{h^3}{4}$$

e dalla regola di Cartesio (vedi nota) si trova che si sono sempre iperboloidi. In particolare, iperboloidi iperbolici per $h < \frac{1}{4}$, essendo $|B > 0$. E e si hanno iperboloidi ellittici per $h > \frac{1}{4}$,essendo $|B| < 0$.
Nota Regola di Cartesio: dato un polinomio di grado n alla permanenza di segno di due coefficienti consecutivi, ovvero uno di grado n e l'altro di grado $n-1$ entrambi negativi o positivi, corrisponde una radice negativa del polinomio. E ad una variazione di segno tra i due, ovvero uno positivo ed uno negativo o viceversa, corrisponde una radice positiva del polinomio. Si può costruire la seguente tabella:

		0	1
-1	-	-	-
$h-1$	-	-	+
$\frac{(h+2)^2}{4} = (\frac{h^2}{4} + h + 1)$	+	+	+
$-\frac{h^3}{4}$	+	-	-

dove i termini della prima riga in alto rappresentano i valori che annullano i coefficienti della variabile T; i termini a sinistra sono i coefficienti della T

in ordine decrescente rispetto alle potenze di T, ed i segni positivi e/o negativi in ogni riga rappresentano rispettivamente il segno di ogni coefficiente nell'intervallo considerato.

II

Si ha

$$|M| = |\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & \text{-1} & 1 \\ 0 & \text{h} & \text{1+h} \\ 0 & 1 & \text{2h} \end{vmatrix} = (h+1)(2h^2 - 1 - h) =$$

$$= 2(h+1)(h-1)(h+\frac{1}{2})$$

Quindi f è un isomorfismo per $h \neq -1, 1, -\frac{1}{2}$. Per $h = 1$, il rango di M è uguale a 2. Quindi $dimImf = 2$ ed una base di Imf è $B = [(2,0,0)_{\mathcal{B}}, (-1,1,1)_{\mathcal{B}}]$; inoltre $dimKerf = 1$ e $kerf = \mathcal{L}(-\frac{3}{2}z, -2z, z)_{\mathcal{B}}$ ed una base è $(-\frac{3}{2}, -2, 1)_{\mathcal{B}}$.
Per $h = -1$, il rango di M è uguale a 2. Quindi $dimImf = 2$ ed una base di Imf è $B = [(-1,-1,1)_{\mathcal{B}}, (1,0,-2)_{\mathcal{B}}]$; inoltre $dimKerf = 1$ e $kerf = \mathcal{L}(x,0,0)_{\mathcal{B}}$ ed una base è $(1,0,0)_{\mathcal{B}} = v_1$.
Per $h = -\frac{1}{2}$, il rango di M è uguale a 2. Quindi $dimImf = 2$ ed una base di Imf è $B = [(\frac{1}{2},0,0)_{\mathcal{B}}, (-1,-\frac{1}{2},1)_{\mathcal{B}}]$; inoltre $dimKerf = 1$ e $kerf = \mathcal{L}(0,y,y)_{\mathcal{B}}$ ed una base è $(0,1,1)_{\mathcal{B}} = v_2 + v_3$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|M - IT| = \begin{vmatrix} \text{h+1-T} & \text{-1} & 1 \\ 0 & \text{h-T} & \text{1+h} \\ 0 & 1 & \text{2h-T} \end{vmatrix} = (h+1-T)[T^2 - 3hT + 2h^2 - h - 1] =$$

$$= (h+1-T)(T-2h-1)(T-h+1)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h+1, \quad T_2 = 2h+1, \quad T_3 = h-1$$

ed essendo

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \Leftrightarrow h \neq 0, -2$$

in tal caso f ha tre autovalori distinti e, quindi, f è semplice.
Si ha:

$$V_{h+1} = \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid y = 0, z = 0\}$$
$$= \mathcal{L}\left((x,0,0)_{\mathcal{B}}\right)$$

ed una base di V_{h+1} è data dal vettore $a_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}} = v_1$.

$$V_{2h+1} = \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid x = 0, z = y\} = \mathcal{L}\left((0,y,y)_{\mathcal{B}}\right)$$

ed una base di V_{2h+1} è data dal vettore $a_2 = (0,1,1)_{\mathcal{B}}$.

$$V_{h-1} = \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid x = -\frac{h+2}{2}z, y = -(1+h)z\} =$$
$$= \mathcal{L}\left((-\frac{2+h}{2}z, -(h+1)z, z)_{\mathcal{B}} \right)$$

ed una base di V_{h-1} è data dal vettore $a_3 = (-\frac{2+h}{2}, -(h+1), 1)$. Pertanto per $h \neq 0, 2$ una base di autovettori per f è $\mathcal{A} = [a_1, a_2, a_3]$
Sia adesso $h = -2$. Si ha l'autovalore $T = -3$ con $m_{-3} = 2$ e $T_3 = -1$ con $m_{-1} = 1$; Per $T = -1$ il rango di M è due e quindi $dimV_{-1} = 1 = m_{-1}$; ma per $T = -3$ il rango di $M - 3I$ è uguale a due e quindi $dimV_{-3} = 1 \neq m_{-3}$; allora in questo caso f non è semplice.
Sia adesso $h = 0$. Si ha l'autovalore $T_1 = -1$ con $m_{-1} = 1$ e $T_2 = 1$ con $m_1 = 2$; Per $T = -1$ il rango di $M+I$ è due e quindi $dimV_{-1} = 1 = m_{-1}$; per $T = 1$ il rango di M è uno e quindi $dimV_1 = 2m_1$; allora in questo caso f è semplice. Una Base di V_1 è $(1,0,0)_{\mathcal{B}}, (0,1,1)_{\mathcal{B}}$. Una base di V_{-1} è $(1,1,-1)_{\mathcal{B}}$. Pertanto una base di autovettori di V è $[(1,0,0)_{\mathcal{B}}, (0,1,1)_{\mathcal{B}}, (1,1,-1)_{\mathcal{B}}]$.
Troviamo $f^{-1}(1,-2,-1,1)$. Pertanto trovare $f^{-1}(w)$ equivale a risolvere il seguente sistema non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $[(1,-2,-1,1)]_{\mathcal{B}}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} h+1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & h & 1+h & | & -1 \\ 0 & 1 & 2h & | & 0 \end{pmatrix}$$

Applicando il teorema di Cramer per $h \neq -1, 1, \frac{1}{2}$ si ha una ed una sola soluzione

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = \left(-\frac{h-2}{(h+1)(2h^2-h-1)}, -\frac{2h}{2h^2-h-1}, \frac{1}{2h^2-h-1} \right)_{\mathcal{B}}.$$

Per $h = -1, 1, \frac{1}{2}$, applicando il teorema di Rouche-Capelli il sistema è impossibile e quindi $f^{-1}(1,-1,0)_{\mathcal{B}} = \emptyset$