FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea in **Ingegneria Edile Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 15/04/2011

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e/o appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Scrivere e studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ tangenti alla retta $x - y = 0$ nel punto $(1, 1)$ e passanti per $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

2) Sia $x^2 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$ una conica del piano $z = 0$. Dire di che conica si tratta e determinare una sua forma canonica ed il cambiamento di coordinate che la determina.

3) Determinare e studiare il fascio di quadriche contenente la conica $z = 0, x^2 + y^2 - 1 = 0$ ed avente nel punto $(1, 0, -1, 0)$ piano tangente $x + z = 0$

III

In $\mathbb{R}^4$, sia dato il seguente spazio vettoriale $V = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2 e v_3 sono i vettori $v_1 = (1, 0, 1, -1)$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, -1, 1, 0)$.
Sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (1 - h, -1 - 2h, h + 2, 0) \\ f(v_3) &= (3, 1 - h, 2 + h, -2) \end{aligned}$$

e v_2 è un autovettore associato all'autovalore $h - 2$ ed h parametro reale.

1. Studiare $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ con $\mathcal{B}$ una base di V, al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f, e nei casi in cui è semplice determinare una base di autovettori.
3. Trovare $f^{-1}(1, -2, 3, -1)$ al variare del parametro reale h

Soluzione

I

Siano $A(1,1), B(1,0)$ e $C(-1,0)$. La retta AB ha equazione $x-1=0$. La retta AC ha equazione $x-2y+1=0$ e la retta BC ha equazione $y=0$. Pertanto il fascio richiesto ha equazione

$$\Phi : y(x-y) + h(x-1)(x-2y+1) = 0,$$

da cui

$$\Phi : x^2 - hy^2 + (h-2)xy + 2y - 1 = 0.$$

pertanto

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h-2}{2} & 0 \\ \frac{h-2}{2} & \text{-h} & 1 \\ 0 & 1 & \text{-1} \end{vmatrix} = \frac{h^2}{4}$$

Allora

1. $|B| = 0 \Leftrightarrow h = 0$. Per $h = 0$ si ha la conica spezzata nelle due rette $(x-1)(x-2y+1) = 0$

2. $|B| \neq 0 \Leftrightarrow h \neq 0$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{h-2}{2} \\ \frac{h-}{2} & \text{-h} \end{vmatrix} = -\frac{h^2+4}{4} < 0 \text{ per ogni } h \in \mathbb{R}$$

Quindi si hanno solo iperboli. In particolare, $TrA = 0 \Leftrightarrow h = 1$ e quindi si ha l'iperbole equilatera $\mathcal{I} := x^2 - y^2 - xy + 2y - 1 = 0$.
2) La conica $x^2 - 2y^2 + 2y - 1 = 0$ è un'iperbole, in quanto $|B \neq 0$ e $A < 0$. Una sua forma canonica è del tipo $\alpha X^2 + \beta Y^= \gamma$ dove α e β sono gli autovalori della sottomatrice A. Si ha $\alpha = 1$ e $\beta = -2$. Dall'uguaglianza $|B| = |B'|$, ovvero $1 = -\alpha\beta\gamma$, si ha $\gamma = \frac{1}{2}$. Quindi una forma canonica è $X^2 - 2Y^2 = \frac{1}{2}$.
la matrice della rotazione antioraria è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove la prima colonna $(1,0)$ è data dalle componenti dell'autovettore associato all'autovalore α e la seconda colonna $(0,1)$ è data dalle componenti dell'autovettore associato all'autovalore β. In questo caso sono gia' di norma unitaria. Le coordinate del centro di simmetria $(0, \frac{1}{2}$ si ottengono risolvendo il sistema lineare associato alle prime due righe della matrice B. Pertanto la matrice Q della rototraslazione è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Da $z(ax+by+cz+d)+x^2+y^2-1=0$, imponendo che il piano $x+z=0$ sia tangente nel punto $(1,0-1,0)$, si ha

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{a}{2} & 0\\ 0 & 1 & \frac{b}{2} & 0\\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & c & \frac{d}{2}\\ 0 & 0 & \frac{d}{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\rho(x+z)$$

da cui si ottiene $a=2-2\rho, b=0, c=1-2\rho$ e $d=0$.
La matrice del fascio di quadriche è la seguente

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1-\rho & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1-\rho & 0 & 1-2\rho & 0\\ 0 & & 0 & -1\end{vmatrix}=\rho^2$$

e

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1-\rho\\ 0 & 1 & 0\\ 1-\rho & 0 & 1-2\rho\end{vmatrix}=-\rho^2$$

Quindi:
$|B|=0 \Leftrightarrow \rho=0$. Se $h=0$ allora $rk(B)=3$ ed essendo $|A|=0$ la quadrica è il cilindro:$\Psi: x^2+y^2+2xz+z^2-1=0$.
Sia $|B|\neq 0 \Leftrightarrow h\neq 0$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A|=0 \Leftrightarrow \rho=0$, non si hanno paraboloidi. Inoltre, essendo $|B>0$ si hanno solo iperboloidi iperbolici. (Un altro metodo per sapere se ci sono iperboloidi e/o ellissoidi consiste nello studiamo del segno degli autovalori relativi al polinomio caratteristico associato alla sottomatrice A. Vedi precedenti esercizi svolti)

II

Si ha

$$|M|=|\mathcal{M}^{\mathcal{B}}(f)|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 2\\ 1-h & h-2 & 1\\ h+2 & 0 & h\end{vmatrix}=-(h+2)(h-2)$$

Quindi f è un isomorfismo per $h\neq -2,2$. Per $h=2$, il rango di M è uguale a 2. Quindi $dimImf=2$ ed una base di Imf è $B=[(0,-1,4)_{\mathcal{B}},(2,1,2)_{\mathcal{B}}]$; inoltre $dimKerf=1$ e $kerf=\mathcal{L}(0,y,0)_{\mathcal{B}}$ ed una base è $(0,1,0)_{\mathcal{B}}=v_2$.
Per $h=-2$, il rango di M è uguale a 2. Quindi $dimImf=2$ ed una base di Imf è $B=[(0,3,0)_{\mathcal{B}},(2,1,-2)_{\mathcal{B}}]$; inoltre $dimKerf=1$ e $kerf=\mathcal{L}(4y,y,0)_{\mathcal{B}}$ ed una base è $(4,3,0)_{\mathcal{B}}$.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h\in\mathbb{R}$. Calcoliamo

$$|M-IT|=\begin{vmatrix}-T & 0 & 2\\ 1-h & h-2-T & 1\\ h+2 & 0 & h-T\end{vmatrix}=(h-2-T)[T^2-hT-2h-4]=$$

$$= (h-2-T)(T-h-2)(T+2)$$

Si hanno quindi i seguenti autovalori:

$$T_1 = h-2, \quad T_2 = h+2, \quad T_3 = -2$$

ed essendo

$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \Leftrightarrow h \neq 0, -4$$

in tal caso f ha tre autovalori distinti e, quindi, f è semplice.
Si ha:

$$\begin{aligned} V_{h-2} &= \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid x = 0, z = 0\} \\ &= \mathcal{L}\left((0,y,0)_{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

ed una base di V_{h-2} è data dal vettore $a_1 = (0,1,0)_{\mathcal{B}} = v_2$.

$$V_{h+2} = \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid z = \frac{h+2}{2}x, y = \frac{h-4}{8}x\} = \mathcal{L}\left((x, \frac{h-4}{8}x, \frac{h+2}{2}x)_{\mathcal{B}}\right)$$

ed una base di V_{h+2} è data dal vettore $a_2 = (1, \frac{h-4}{8}, \frac{h+2}{2})_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{aligned} V_{-2} &= \{(x,y,z)_{\mathcal{B}} \in V \mid x = -z, y = -z\} = \\ &= \mathcal{L}\left((-z,-z,z)_{\mathcal{B}}\right) \end{aligned}$$

ed una base di V_{-2} è data dal vettore $a_3 = (-1,-1,1)_{\mathcal{B}}$. Pertanto per $h \neq 0, -4$ una base di autovettori per f è $\mathcal{A} = [a_1, a_2, a_3]$
Sia adesso $h = -4$. Si ha l'autovalore $T = -2$ con $m_{-2} = 2$ e $T_3 = -6$ con $m_{-6} = 1$; Per $T = -6$ il rango di $M + 6I$ è due e quindi $dimV_{-2} = 1 = m_{-6}$; ma per $T = -2$ il rango di $M + 2I$ è uguale a due e quindi $dimV_{-2} = 1 \neq m_{-2} = 2$; allora in questo caso f non è semplice.
Sia adesso $h = 0$. Si ha l'autovalore $T_1 = 2$ con $m_2 = 1$ e $T_2 = -2$ con $m_{-2} = 2$; Per $T = 2$ il rango di $M - 2I$ è due e quindi $dimV_2 = 1 = m_2$; per $T = -2$ il rango di $M + 2I$ è uno e quindi $dimV_{-2} = 2m_{-2}$; allora in questo caso f è semplice. Una Base di V_-2 è $(0,1,0)_{\mathcal{B}}, (-1,0,1)_{\mathcal{B}}$. Una base di V_2 è $(2,1,2)_{\mathcal{B}}$.
Pertanto una base di autovettori di V è $[(0,1,0)_{\mathcal{B}}, (-1,0,1)_{\mathcal{B}}, (2,1,2)_{\mathcal{B}}]$.
Troviamo $f^{-1}(1,-2,3,-1)$. Pertanto trovare $f^{-1}(w)$ equivale a risolvere il seguente sistema non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $[(1,-2,3,-1)]_{\mathcal{B}}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & | & 1 \\ 1-h & h-2 & 1 & | & 0 \\ h+2 & 0 & h & | & 2 \end{pmatrix}$$

Applicando il teorema di Cramer per $h \neq -2, 2$ si ha una ed una sola soluzione

$$(x,y,z)_{\mathcal{B}} = \left(\frac{4-h}{2(h+2)}, -\frac{h^2-4h+6}{2(h-2)(h+2)}, \frac{1}{2}\right)_{\mathcal{B}}.$$

Per $h = -2, 2$, applicando il teorema di Rouche-Capelli il sistema è impossibile e quindi $f^{-1}(1,0,2)_{\mathcal{B}} = \emptyset$