FACOLTA' DI INGEGNERIA

Università di Catania

Corso di laurea in **Ingegneria Edile - Architettura**

Prova scritta di **Geometria** assegnata il 12/02/2011

- Durata della prova: due ore
- Non si può uscire dall'aula prima di aver consegnato definitivamente il compito.
- Non si possono consultare i libri di testo e appunti.
- Usare solo la carta fornita dai Docenti.

I

1) Studiare il fascio di coniche del piano $z = 0$ di equazione

$$(h+1)x^2 + hy^2 + x - h = 0$$

Determinare coniche spezzate e punti base.

2) Sia $\mathcal{C}$ la circonferenza del fascio. Determinare e studiare il fascio di quadriche contenenti $\mathcal{C}$, passanti per $(0,0,1,0)$ ed ivi aventi piano tangente $2x + 1 = 0$.

3) Sia $\wp$ la parabola del fascio. Determinare il cono di vertice $(1,0,1)$ e direttrice $\wp$.

II

In $\mathbb{R}^3$, siano dati i seguenti vettori $v_1 = (2,1,0)$, $v_2 = (0,-1,1)$ e $v_3 = (1,0,1)$.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito da

$$\begin{aligned} f(v_1) &= (2+h, h-2, 2h+3) \\ f(v_2) &= (1-h, 2-h, h) \\ f(v_3) &= (2, 0, 2h+2) \end{aligned}$$

con h parametro reale.

1. Studiare f al variare del parametro h trovando una base per Imf e $Kerf$.
2. Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui è semplice trovare una base di autovettori di f.
3. trovare $f^{-1}(0, h-2, 1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

Soluzione

I

Il fascio di coniche è il seguente:

$$\phi : \quad h(x^2+y^2-1)+x(x+1)=0.$$

Quindi per $h=0$ si ha la conica spezzata in $x(x+1)=0$. Per $h=\infty$ si ottiene la circonferenza $\mathcal{C}: x^2+y^2-1=0$ Si ha

$$|B| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \text{h} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \text{-h} \end{vmatrix} = -h\left(h+\frac{1}{2}\right)^2$$

Allora

1. $|B|=0 \Leftrightarrow h=0,-\frac{1}{2}$, e per $h=0$ ϕ si spezza nelle due rette $x(x+1)=0$. Per $h=-\frac{1}{2}$, ϕ diventa $\frac{1}{2}[(x+1)^2-y^2]=0$ e quindi ϕ si spezza nelle due rette $(x+1-y)(x+1+y)=0$.

2. $|B|\neq 0 \Leftrightarrow k\neq 0,-\frac{1}{2}$ e si hanno coniche irriducibili.

Essendo

$$|A| = \begin{vmatrix} \text{h+1} & 0 \\ 0 & \text{h} \end{vmatrix} = h(h+1)$$

Si ha: $|A|=0 \Leftrightarrow h=0,-1$ e si ha la sola parabola per $h=-1$, ovvero $\wp: -y^2+x+1=0$. $|A|>0 \Leftrightarrow h<-1, h>0$ e si hanno ellissi. Non si hanno altre circonferenze eccetto $\mathcal{C}: x^2+y^2-1=0$ $|A|<0 \Leftrightarrow -1<h<0$ e si hanno iperboli. Essendo $Tr(A)=0 \Leftrightarrow 2h+1=0$, cioè per $h=-\frac{1}{2}$, non si hanno iperbole equilatere.
le coniche spezzate del fascio sono $x(x+1)=0$ e $(x+1-y)(x+1+y)=0$. I punti base si trovano mettendo a sistema due qualsiasi coniche del fascio. In particolare, usando le due coniche spezzate, si hanno i punti base $(0,1),(0-1)$ ed il punto $(-1,0)$ contato due volte.
2) La circonferenza del fascio è $\mathcal{C}: x^2+y^2-1=0$. Quindi da

$$z(ax+by+cz+d)+x^2+y^2-1=0$$

imponendo che il piano tangente in $(0,0,1,0)$ sia $2x+1=0$, si ha

$$\frac{a}{2}x+\frac{b}{2}y+cz+\frac{d}{2}z=2\rho x+\rho$$

da cui si ottiene

$$a=4\rho, \quad b=0, \quad c=0, \quad d=2\rho\,.$$

Pertanto il fascio di quadriche è il seguente

$$\Psi: \; x^2+y^2+4\rho xz+2\rho z-1=0$$

Quindi
$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\rho & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\rho & 0 & 0 & \rho \\ 1 & 0 & \rho & \text{-1} \end{vmatrix} = 3\rho^2$$
e
$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\rho \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4\rho^2$$
Quindi:
$|B| = 0 \Leftrightarrow \rho = 0$. Se $\rho = 0$, allora $rk(B) = 3$ ed essendo $|A| = 0$, la quadrica è un cilindro.
Sia $|B| \neq 0 \Leftrightarrow \rho \neq 0$. In tal caso, si hanno quadriche non degeneri; in particolare, essendo $|A| \neq 0$, non si hanno paraboloidi. Inoltre, essendo $|B| > 0$ sempre si hanno sempre iperboloidi iperbolici. (Si può utilizzare la regola di Cartesio per stabilire che ci sono solo iperboloidi iperbolici)

II

Sia $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. Si ha
$$|M| = |\mathcal{M}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)| = \begin{vmatrix} 1 & h & 1 \\ 0 & h-2 & 0 \\ h+1 & 1 & h+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ per ogni valore di } h \in \mathbb{R}$$
Quindi f non è mai un isomorfismo.
Riducendo si trova che il rango di M è uguale a 2 per $h \neq 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(1, 0, h+1), (h, h-2, 1)]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x = -z\} = \mathcal{L}(1, 0, -1)$.
Sia $h = 2$. In tal caso si una matrice ridotta è:
$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$
e $rkM = 2$. Pertanto $\dim Imf = 2$ ed una base è data da $[(1, 0, 3), (2, 0, 1)]$; $\dim Kerf = 1$ e $Kerf = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0,\ x = -z\}$, pertanto una base è data da $[(1, 0, -1)]$. Pertanto per ogni $h \in \mathbb{R}$ il rango della matrice è due.
Studiamo la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$. Calcoliamo
$$|M - IT| = \begin{vmatrix} 1-T & \text{h} & 1 \\ 0 & h-2-T & 0 \\ \text{h+1} & 1 & h+1-T \end{vmatrix} = (h-2-T)[(1-T)(h+1-T)-h-1]$$
Si hanno quindi i seguenti autovalori:
$$T_1 = h-2, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = h+2$$

ed essendo
$$T_1 \neq T_2 \neq T_3 \Leftrightarrow h \neq -2, 2$$
in tali casi f ha tre autovalori distinti e, quindi, f è semplice.
Se $h \neq -2, 2$, si ha:

$$V_{h-2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \} = \{(3-h)x + hy + z = 0, (h+1)x + y + 3z = 0.\} =$$
$$= \mathcal{L}\left(\frac{(3h-1)}{4h-8}y, y, -\frac{h^2+2h-3}{4h-8}y\right)$$

ed una base di V_{h-2} è data dal vettore $w_1 = \left(\frac{(3h-1)}{4h-8}, 1, -\frac{h^2+2h-3}{4h-8}\right)$.

$$V_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z, y = 0\}$$

ed una base di V_0 è data dal vettore $w_2 = (1, 0, -1)$.

$$V_{h+2} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = (h+1)x\}$$

ed una base di V_{h+2} è data dal vettore $w_3 = (1, 0, h+1)$. Pertanto per $h \neq -2, 2$ una base di autovettori per f è $\mathcal{A} = [w_1, w_2, w_3]$
Sia adesso $h = -2$. Si ha l'autovalore $T = 0$ con $m_0 = 2$ e $T = -4$ con $m_{-4} = 1$; Essendo, $dimV_0 = 1$, in questo caso f non è semplice.
Sia adesso $h = 2$. Si ha l'autovalore $T = 4$ con $m_4 = 1$ e $T = 0$ con $m_0 = 2$; Essendo, $dimV_0 = 1$, allora anche in questo caso f non è semplice.
3) Per calcolare $f^{-1}(0, h-2, 1))$, basta risolvere il sistema lineare non omogeneo la cui colonna di termini noti è data da $(0, h-2, 1)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{h} & 1 & | & 0 \\ 0 & \text{h-2} & 0 & | & h-2 \\ \text{h+1} & 1 & \text{h+1} & | & 1 \end{pmatrix}$$

Ed essendo $|M| = 0$ per ogni valore di $h \in \mathbb{R}$ non si ha mai una sola soluzione. Riducendo si ottiene per $h \neq 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \text{h} & 1 & | & 0 \\ 0 & \text{h-2} & 0 & | & \text{h-2} \\ 0 & 0 & 0 & | & h^2+h \end{pmatrix}$$

ed applicando il teorema il Rouchè-Capelli si ha:

1. Se $h \neq 0, -1, 2$ allora $f^{-1}(0, h-2, 1) = \emptyset$
2. Se $h = -1$ il sistema ha ∞^{3-2} soluzioni e quindi $f^{-1}(0, -3, 1) = L(1-z, 1, z)$
3. Se $h = 0$ il sistema ha ∞^1 soluzioni e quindi $f^{-1}(0, -2, 1) = L(-z, 1, z)$
4. Se $h = 2$ il sistema ha ∞^1 soluzioni e quindi $f^{-1}(0, 0, 1) = L(\frac{2}{5} - z, -\frac{1}{5}, z)$