

## Cammini Minimi con Il Commissario Montalbano

### Gli interrogatori di Montalbano.

*Nel comune di Vigata sono state realizzate recentemente 3 grosse rapine ai 3 principali supermercati. Il commissario Montalbano è convinto che le 3 rapine siano collegate e che degli accurati interrogatori nelle tre zone vicino i supermercati possano portare alla scoperta dei colpevoli. A tal fine la mappa del comune di Vigata viene suddivisa da Montalbano in tre zone nelle quali effettuare le indagini; ogni zona contiene i punti della mappa più vicini a ciascuno dei tre supermercati in cui si sono verificate le rapine. Fazio e Galluzzo si occuperanno delle indagini nelle prime due zone. La terza zona verrà invece affidata al suo vice Mimì Augello.*

Si immagini la rete stradale del comune di Vigata come un grafo  $G=(V,E)$  orientato e pesato, in cui le strade sono rappresentate dagli archi e il peso di ogni arco rappresenta la lunghezza della strada. Siano  $v_1, v_2$  e  $v_3$  i tre nodi corrispondenti ai tre supermercati. Si proponga un algoritmo efficiente per generare una partizione dell'insieme dei nodi  $V$ , in tre sottoinsiemi  $V_1, V_2$  e  $V_3$  tali che:

- Ogni nodo del grafo appartiene ad uno ed uno solo dei tre sottoinsiemi;
- $v_1$  appartiene a  $V_1$ ,  $v_2$  appartiene a  $V_2$  e  $v_3$  appartiene a  $V_3$ ;
- se un nodo  $v$  appartiene al sottoinsieme  $V_i$ , allora il supermercato più vicino a  $v$ , in termini di distanza di cammino, è  $v_i$

Si fornisca lo pseudocodice dell'algoritmo descrivendone adeguatamente la struttura. Se ne calcoli la complessità asintotica.

### Gli arancini di Montalbano.

*Per la serata di capodanno il commissario Montalbano è stato invitato a cena dalla sua cameriera Adelina. Il commissario non intende mancare all'appuntamento dato che per quella serata Adelina ha previsto di preparare i suoi magnifici arancini. Per ricambiare il gentile invito, Montalbano ha pensato di portare alla cena dei cannoli alla ricotta comprandoli alla rinomata pasticceria Augello, la cui proprietaria è la sorella del suo vice. Il commissario deve quindi recarsi alla pasticceria durante il suo percorso verso casa di Adelina.*

Si immagini la rete stradale del comune di Vigata come un grafo  $G=(V,E)$  orientato e pesato, in cui le strade sono rappresentate dagli archi e il peso di ogni arco rappresenta la lunghezza della strada. Siano:

$c \in V$ , il nodo che rappresenta la casa del commissario Montalbano;

$p \in V$ , il nodo che rappresenta la pasticceria Augello;

$a \in V$ , il nodo che rappresenta la casa della cameriera Adelina.

Si dia un algoritmo che risolva il problema di identificare il costo del più corto cammino dal nodo sorgente  $c$  al nodo destinazione  $a$ , che passi per un dato nodo  $p$ .

Che complessità ha l'algoritmo trovato?

## Il pranzo di Montalbano.

*Il 18 di giugno il commissario Montalbano viene convocato d'urgenza dal vicequestore di Montelusa per delle rogne inerenti un'indagine di qualche anno prima. Il rapporto tra il commissario e il vicequestore non si può certo dire essere fondato sulla reciproca stima. Il commissario decide quindi di lasciare attendere per qualche ora il vicequestore e recarsi a pranzare in uno dei tanti ristoranti del comune di Vigata.*

*Il commissario ha già in mente in quali ristoranti recarsi.... sa bene che non se ne pentirà!*

*Il vicequestore può attendere!*

Si consideri la rete stradale di Vigata come un grafo  $G=(V,E)$  orientato e pesato, dove la presenza di un arco  $(u,v)$  indica un collegamento stradale dal punto  $u$  al punto  $v$ , ed il peso dell'arco indica la lunghezza del collegamento. Sia  $n$  il numero di nodi nella rete stradale e sia  $m$  il numero di collegamenti presenti, con  $m > \log n$ .

Siano inoltre  $r_1, r_2, \dots, r_k \in V$ , i  $k$  ristoranti in cui il commissario Montalbano potrebbe recarsi a pranzare, con  $k = o(n)$ . Sia  $c \in V$ , il nodo della rete stradale che identifica il commissariato di Vigata. Sia  $q \in V$  il nodo della rete che identifica la questura di Montelusa.

Definire un algoritmo efficiente che identifichi il più breve cammino da  $c$  a  $q$ , passante per almeno uno dei  $k$  ristoranti, supponendo che  $m = \Omega(k \log n)$ .

(l'algoritmo dovrà identificare il ristorante  $v_i$ , tra le  $k$  possibili alternative, che permetta di percorrere il più breve cammino da  $c$  a  $q$ , passando per  $v_i$ )

## I semafori di Montalbano.

*I funerali non sono mai piaciuti al commissario Montalbano. Ma a quello della madre del vicequestore di Montelusa lui non poteva mancare: il vicequestore l'avrebbe presa come offesa alla sua persona. Essendo che la funzione solenne si sarebbe svolta la mattina seguente, alle ore 7:30, presso la chiesa madre di Montelusa, il commissario pensò bene di non negarsi un meritato riposo che sarebbe durato fino alle sette. Il commissario tuttavia non aveva riflettuto bene non considerando il fatto che a Montelusa, a differenza di quanto avviene a Vigata, i semafori devono essere rispettati!*

Si immagini la rete stradale del comune di Montelusa come un grafo  $G=(V,E)$  orientato e pesato, in cui le strade sono rappresentate dagli archi e il peso di ogni arco rappresenta il tempo in secondi necessario a percorrere la strada. Sia  $s$  il vertice di partenza del viaggio del commissario Montalbano verso la Chiesa Madre di Montelusa, identificata dal vertice  $c$ . Si supponga inoltre che ad ogni nodo  $v$  del grafo sia associata una funzione  $sem(v,t)$  il cui valore ha il seguente significato:

- $sem(v,t) = x > 0$ , se al tempo  $t$  il semaforo del vertice  $v$  è rosso e bisogna aspettare  $x$  secondi prima che diventi verde
- $sem(v,t) = 0$ , se al tempo  $t$  il semaforo del vertice  $v$  è verde

Naturalmente, per un determinato nodo  $v$ , la funzione  $sem(v,t)$  cambia al variare del tempo, per cui si potrebbe avere  $sem(v,2)=7$ ,  $sem(v,3)=6$ ,  $sem(v,9)=0$ . Nei nodi  $v$  in cui non è presente alcun semaforo si suppone  $sem(v,t)=0$  per tutti i valori di  $t$ . Se il commissario arriva ad un vertice  $v$  al tempo  $t$  e vale  $sem(v,t)=x > 0$ , allora dovrà aspettare  $x$  secondi prima di continuare il suo cammino.

Supponendo che il commissario inizi il suo cammino al tempo  $t=0$ , si dia un algoritmo che trovi il cammino minimo, in termini di tempo, dal vertice sorgente  $s$  al vertice destinazione  $t$ . Si fornisca lo pseudocodice dell'algoritmo descrivendone adeguatamente la struttura. Se ne calcoli la complessità asintotica.

## La mappa di Catarella

*Quel giorno Salvo Montalbano arrivò in commissariato di umore nero. Questo perchè il giorno appresso il suo aiutante Catarella era arrivato nuovamente in ritardo per una consegna urgente al comune di Montelusa. Era quindi stato convocato in questura per un richiamo ufficiale.*

*Entrò nell'ufficio di Mimì Augello bestemmiando come un diavolo contro Catarella, e ordinò al suo vice di realizzare una mappa del comune che contenesse solo le strade più brevi per raggiungere le varie destinazioni del paese. Da ora in poi Catarella non sarebbe più arrivato in ritardo!*

Si immagini la rete stradale del comune di Montelusa come un grafo  $G=(V,E)$  orientato e pesato, in cui le strade sono rappresentate dagli archi e il peso di ogni arco, definito dalla funzione  $w:E\rightarrow\mathbb{R}$ , rappresenta il tempo in secondi necessario a percorrere la strada. Definiamo il grafo  $G'=(V,E')$ , detto grafo dei cammini minimi di  $G$ , nel seguente modo:

- $V'$  è l'insieme dei vertici di  $G$  ( uguale a quello di  $G'$ )
- $E'$  è l'insieme di tutti gli archi di  $G$  che fanno parte di un qualsiasi cammino minimo nel grafo; in altre parole  $(u,v)$  appartiene ad  $E'$  se e solo se  $(u,v)$  appartiene ad  $E$  e  $(u,v)$  fa parte di un cammino minimo .

Fornire un algoritmo che dato un grafo  $G$  in input ne calcoli i cammini minimi e ne costruisca il relativo grafo dei cammini minimi.

(Non si ha alcuna restrizione sul grafo di input  $G$ . Si costruisca il grafo  $G'$  utilizzando la procedura  $AddEdge(u,v,G')$  che aggiunge al grafo  $G'$  l'arco  $(u,v)$ . Notare che per una coppia di vertici si possono avere più cammini minimi)