

# CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI FUNZIONALE (corso semestrale)

Anno Accademico 2002-03

(Prof. G. Emmanuele)

## 1-Spazi vettoriali

Spazi vettoriali ordinati. Spazi di riesz. Spazi di Riesz completi secondo Dedekind. Esempi:  $l_\infty$  è completo secondo Dedekind,  $c$  non è completo secondo Dedekind. Teorema di Hahn-Banach (caso reale) ed estensione al caso complesso.

## 2-Spazi vettoriali topologici

Spazi vettoriali topologici. Proprietà. Basi di intorni. Caratterizzazioni delle topologie vettoriali. Somma diretta algebrica e somma diretta topologica. Gli spazi vettoriali topologici di dimensione finita sono tutti isomorfi a  $\mathbb{K}^n$ . Locale compattezza e spazi vettoriali topologici di dimensione finita. Iperpiani in spazi vettoriali. Iperpiani in spazi vettoriali topologici sono densi o chiusi. Caratterizzazione della non esistenza di iperpiani chiusi. Insiemi limitati in spazi vettoriali topologici. Metrizzabilità di topologie vettoriali di Hausdorff. Teorema di Baire in spazi metrici completi. Basi di Hamel in spazi vettoriali topologici. Normabilità di topologie vettoriali.

## 3-Spazi localmente convessi

Insiemi convessi in spazi vettoriali topologici. Spazi localmente convessi. Definizione di topologie vettoriali localmente convesse attraverso l'uso di seminorme. Teorema di Hahn-Banach in spazi localmente convessi. Teorema di Separazione e Teorema di Stretta Separazione. Spazi  $L^p([a, b])$ ,  $0 < p < 1$ . Iperpiani di supporto. Punti estremi. Teorema di Krein-Milman sui punti estremi. Esempi: la palla unitaria chiusa di  $L^1$  e la palla unitaria chiusa di  $c_0$  non possiedono punti estremi. Omomorfismi topologici. Teorema di omomorfismo di Banach (o dell'Applicazione Aperta). Teorema delle due norme. Teorema del Grafico Chiuso. Topologia debole  $\sigma(X, X')$  e topologia debole\*  $\sigma(X', X)$ . Uguaglianze  $(X, \sigma(X, X'))' = X'$  e  $(X', \sigma(X', X))' = X$  in spazi localmente convessi. Insieme polare ed insieme prepolare. Principio di Uniforme Limitatezza. Teorema di Alaoglu-Bourbaki.

## 4-Alcune applicazioni agli spazi di Banach

Complementabilità di  $l_\infty$  in ogni spazio di Banach che lo contiene come sottospazio proprio. Riflessività. Limitatezza in norma e nella topologia debole. Teorema di Goldstine. Caratterizzazione di Kakutani della

riflessività. Uniforme convessità. Teorema di Milman-Pettis (ogni spazio uniformemente convesso è riflessivo). Non metrizzabilità di  $\sigma(X, X')$  e di  $\sigma(X', X)$  se  $\dim X = \infty$ . Caratterizzazione della metrizzabilità della restrizione di  $\sigma(X, X')$  (risp. di  $\sigma(X', X)$ ) a  $\overline{B_X(\theta, 1)}$  (risp.  $\overline{B_{X'}(\theta, 1)}$ )