

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA INDUSTRIALE

DIARIO DELLE LEZIONI DI ANALISI MATEMATICA I Anno Accademico 2011-2012

1) Lunedì 10 Ottobre 2011

Irrazionalità della soluzione dell'equazione $x^2=2$. Definizione di numero reale come allineamento decimale. Uguaglianza di due numeri reali e proprietà. Operazioni elementari e proprietà. Ordinamento totale e proprietà. Legge di annullamento del prodotto. Assioma (o Principio) di Induzione. Disuguaglianza di Bernoulli (con dimostrazione). La differenza x^n-y^n come prodotto notevole (con dimostrazione).

N.B. Per approfondimenti si rinvia al Capitolo 1 del libro di testo.

2) Martedì 11 Ottobre 2011

Regola dei segni. Proprietà della potenza a^n , a numero reale, n numero naturale (con dimostrazione). Valore assoluto di un numero reale e sue proprietà (con dimostrazioni). Studio dell'equazione $x^n=a$ (il "Teorema di Esistenza ed Unicità della Radice n -esima Aritmetica" è stato enunciato, ma non dimostrato). Potenza di base reale ed esponente razionale con proprietà. Potenza di base reale ed esponente reale con proprietà. Equazione esponenziale e logaritmo (il Teorema 6.2 del libro di testo è stato enunciato, ma non dimostrato). Proprietà dei logaritmi.

N.B. Per approfondimenti si rinvia al Capitolo 1 del libro di testo.

3) Giovedì 13 Ottobre 2011

Equazioni e Disequazioni irrazionali. Esercizi. Progressione geometrica (con definizione del simbolo di sommatoria).

4) Lunedì 17 Ottobre 2011

Minorante, maggiorante, minimo e massimo di un insieme numerico. Unicità del minimo e del massimo. Costruzione dell'estremo inferiore e superiore di un insieme con il procedimento di dicotomia. Esercizi.

5) Martedì 18 Ottobre 2011

Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore (con dimostrazione). Funzioni: definizione, legge, dominio, campo di esistenza, codominio, insieme immagine. Esempi di funzioni elementari (vedere il Capitolo 1, par. 8, per un elenco completo delle funzioni elementari da conoscere). Esercizi sulla determinazione del campo di esistenza e dell'insieme immagine. Grafico di una funzione e rappresentazione grafica. Interpretazione geometrica dei concetti di funzione, dominio, insieme immagine.

6) Giovedì 20 Ottobre 2011

Funzioni suriettive, iniettive, biettive. Esempi. Definizione di successione. Definizione di limite di una successione nel caso della convergenza. Esempi.

7) Lunedì 24 ottobre 2011

Teoremi di Unicità del Limite, di Permanenza del Segno, del Confronto per successioni convergenti (con dimostrazioni). Definizione di Intervallo (vari casi). Disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica (con dimostrazione basata sull'Assioma di Induzione) ed applicazione alla successione $((1+1/n)^n)$ (studio della monotonìa, con dimostrazione).

8) Martedì 25 Ottobre 2011

Primi limiti notevoli: limite della successione geometrica. $\lim (\sin x_n)/x_n = 1$ (entrambi con dimostrazione). Definizione di limite di una successione nel caso della divergenza positiva e negativa. Esempi. Teoremi di Unicità del Limite, di Permanenza del Segno, del Confronto per successioni divergenti (con dimostrazioni da fare dal libro). Successioni regolari e non regolari o oscillanti. Limite della somma di due successioni (con dimostrazioni).

9) Giovedì 27 Ottobre 2011

Proprietà del limite: $\lim a_n = L \Rightarrow \lim |a_n| = |L|$ e controesempio all'implicazione inversa; $\lim a_n = 0 \Leftrightarrow \lim |a_n| = 0$; $\lim a_n = L \Leftrightarrow \lim (a_n - L) = 0$ (fare le dimostrazioni dal libro). Ogni successione convergente è limitata (con dimostrazione) e controesempio all'implicazione inversa. Limite del prodotto di due successioni (con dimostrazioni). Limite della successione dei reciproci (con dimostrazioni). Limite di un quoziente (con dimostrazioni). Forme indeterminate (con esempi).

10) Giovedì 3 Novembre 2011

Successioni monotone e loro limiti. Successione di Nepero e suo limite. Logaritmi Neperiani o naturali. $\lim_n (1 + x/n)^n = e^x$ (senza dimostrazione). Limiti dei logaritmi, delle potenze, degli esponenziali (con alcune dimostrazioni svolte. Si consiglia di guardare sul libro.). Dimostrazione dei limiti notevoli seguenti: $\lim_n (1 + x_n)^{1/x_n} = e$, $\lim_n [\log(1 + x_n)]/x_n = 1$ quando $\lim_n x_n = 0$.

11) Lunedì 7 Novembre 2011

Dimostrazione dei limiti notevoli seguenti: $\lim_n [(1 + x_n)^\alpha - 1]/x_n = \alpha$, $\lim_n [a^{x_n} - 1]/x_n = \log a$ quando $\lim_n x_n = 0$. $\lim_n \sin x_n/x_n = 1$ quando $\lim_n x_n = 0$ (con dimostrazione). Funzioni arccos x, arcsen x, arctg x. Funzioni cosh x, sinh x, tgh x e loro invertibilità (con dimostrazioni). Limiti notevoli relativi a queste funzioni (con dimostrazione di quelli relativi alle funzioni iperboliche).

12) Martedì 8 Novembre 2011

Limiti notevoli relativi ai polinomi (con dimostrazioni). Limiti dedotti dal $\lim_n \sin x_n/x_n = 1$ quando $\lim_n x_n = 0$ (con dimostrazioni). Successione $[(a_n)^{b_n}]$ e suoi limiti. Forme indeterminate. Teoremi di Cesaro per le forme indeterminate $0/0$ e ∞/∞ (senza dimostrazione) con applicazione al calcolo di alcuni limiti da cui segue il confronto di logaritmo, potenza, esponenziale.

13) Giovedì 10 Novembre 2011

Esercizi sull'uso dell'Assioma di Induzione, sul calcolo di inf e sup, sul calcolo di limiti.

14) Lunedì 14 Novembre 2011

Teorema sul Limite della Media Aritmetica (senza dimostrazione) e applicazione al Calcolo di Aree (dimostrazione). Teorema sul Limite della Media Geometrica (senza dimostrazione) e conseguenza relativa al $\lim \sqrt[n]{a_n}$ (con dimostrazione). Applicazione del precedente risultato al calcolo dei limiti notevoli seguenti $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim \sqrt[n]{\log n} = 1$. Definizione di fattoriale e semifattoriale. Definizione di successioni estratte. Teorema sul Limite di una Successione Estratta (con dimostrazione). Osservazioni sul possibile uso del Teorema sul Limite di una Successione Estratta. Definizione di Serie Numerica. Convergenza, Divergenza e Indeterminazione di una Serie Numerica. Applicazione del calcolo della somma di una serie al problema della "Pallina che rimbalza" e della nota convenzione sui numeri con periodo 9 (con dimostrazioni).

15) Martedì 15 Novembre 2011

Serie geometrica, serie telescopica, serie armonica (con dimostrazioni). Due condizioni necessarie per la convergenza di una serie (senza dimostrazioni) ed esempi di loro applicazione. Serie a termini di segno costante. Teorema sulla regolarità di una serie a termini di segno costante (con dimostrazione). Criterio del Confronto e Corollario (con dimostrazioni). Criterio del Rapporto (con dimostrazione).

16) Giovedì 17 Novembre 2011

Maggiorazione dell'errore dal Criterio del Rapporto (con dimostrazione). Corollario del Criterio del Rapporto (con dimostrazione). Criterio della Radice (con dimostrazione). Maggiorazione dell'errore dal Criterio della Radice (con dimostrazione). Corollario del Criterio della Radice (con dimostrazione). Criterio di Raabe (con dimostrazione). Maggiorazione dell'errore dal Criterio di Raabe (con dimostrazione). Corollario del Criterio di Raabe (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi.

17) Lunedì 21 Novembre 2011

Criterio di Condensazione di Cauchy (senza dimostrazione). Assoluta convergenza. L'assoluta convergenza implica la convergenza (senza dimostrazione). Serie a termini di segno alterno. Criterio di Leibnitz e maggiorazione dell'errore (con dimostrazione). Criterio di non divergenza per le serie a termini di segno alterno (senza dimostrazione). Esempi ed esercizi.

18) Martedì 22 Novembre 2011

Esercizi. Definizione di limite di funzioni (nove casi) ed esempi. Esercizi sui limiti di funzioni. Definizione di punto di accumulazione.

19) Giovedì 24 Novembre 2011

Teorema di collegamento fra i limiti di funzioni e quelli di successioni (con dimostrazione). Estensione dei risultati validi per i limiti di successioni ai limiti delle funzioni. Forme indeterminate. Asintoti di funzioni. Definizione di funzioni monotone e loro limiti (si vedano le dimostrazioni dei risultati a pag. 231-232 del libro di testo)

20) Lunedì 28 Novembre 2011

Limiti di funzioni monotone (si vedano le dimostrazioni dei risultati a pag. 231-232 del libro di testo). Funzioni composte e loro limiti (con la sola enunciazione del Teorema sul Limite di Funzioni Composte). Osservazione sulle ipotesi del Teorema sul Limite di Funzioni Composte (si veda anche l'Osservazione 1.2 a pag. 226 del libro di testo). Definizione di continuità in un punto (sia se isolato che di accumulazione) del dominio di una funzione. Continuità delle funzioni elementari (dedotta da alcuni limiti notevoli e dal Teorema di collegamento fra i limiti di funzioni e quelli di successioni). Classificazione dei punti di discontinuità. Continuità delle funzioni somma (con dimostrazione), differenza, prodotto, quoziente, composta.

21) Martedì 29 Novembre 2011

Teorema di Esistenza degli Zeri e Teorema dei Valori Intermedi (con dimostrazioni). Stretta monotonia e unicità dello zero di una funzione. Continuità, invertibilità (=iniettività) e stretta monotonia (interpretazione geometrica). Teorema di Bolzano-Weierstrass (spiegazione geometrica; senza dimostrazione). Corollario sull'esistenza di successione estratte convergenti da successioni limitate (con dimostrazione). Teorema di Weierstrass (con dimostrazione).

22) Giovedì 01 Dicembre 2011

Uniforme continuità e necessità della sua introduzione. Relazioni fra continuità ed uniforme continuità: Teorema di Cantor-Heine; uniforme continuità ed asintoti (senza dimostrazioni, ma con spiegazione geometrica). Definizione di retta tangente al grafico di una funzione continua in un suo punto e motivazione geometrica della definizione. Equazione della retta secante e rapporto incrementale.

23) Lunedì 05 Dicembre 2011

Definizione di derivata. La derivabilità implica la continuità (con dimostrazione) ed esempi di funzioni continue in un punto ma non derivabili ($|x|$ e $x \sin 1/x$). Calcolo delle derivate delle funzioni elementari (funzioni costanti, x^n , a^x , $\ln x$, $\sin x$, $\cos x$, x^a). Teorema di derivabilità di una combinazione lineare, del prodotto, della funzione reciproca, del quoziente (tutti dimostrati). Derivazione di $\tan x$. Interpretazione geometrica della derivata ed equazione della retta tangente. Punti cuspidali, angolosi e di flesso a tangente verticale. Teorema di derivabilità della funzione composta (con dimostrazione). Derivata di $[f(x)]^g(x)$.

24) Martedì 06 Dicembre 2011

Teorema di derivazione della funzione inversa (con dimostrazione) e calcolo della derivata di $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$. Esempio di funzione derivabile in nessun punto (van der Waerden). Teoremi di Fermat, Rolle, Cauchy e Lagrange (tutti dimostrati). Esempio di funzione la cui derivata si annulla in un punto che non è punto di estremo relativo. Primi Corollari (la derivata nulla in un intervallo implica che la funzione è costante, funzioni con uguale derivata differiscono per una costante) del Teorema di Lagrange (con dimostrazione). Definizione di punti di massimo e minimo relativo e metodo per la determinazione dei punti di estremo relativo (dimostrazione del Corollario 7.9 di pag. 301 del libro di testo). Ogni funzione con derivata limitata è lipschitziana (con dimostrazione). Ogni funzione holderiana di esponente maggiore di 1 è costante (con dimostrazione). Teorema sul riconoscimento del tipo di monotonia (non crescita o non decrescenza) grazie al segno della derivata (con dimostrazione).

25) Lunedì 12 Dicembre 2011

Condizione sufficiente per la monotonia in senso stretto (con dimostrazione). Condizione necessaria e sufficiente per la monotonia in senso stretto (con dimostrazione). Applicazioni dei risultati precedenti allo studio di funzioni. Teoremi di De L'Hopital per le forme indeterminate del quoziente (senza dimostrazione). Esercizi sull'applicazione del Teorema di De L'Hopital. Retta tangente e approssimazione del primo ordine. Formula di Taylor con resto di Lagrange (senza dimostrazione) ed esercizi sull'uso della Formula di Taylor con resto di Lagrange.

26) Martedì 13 Dicembre 2011

Sviluppi in serie di $\sin x$, $\cos x$, e^x (senza dimostrazioni). Epigrafico di una funzione. Definizione di funzione convessa (e concava). Caratterizzazione della convessità attraverso l'uso di segmenti su rette secanti il grafico di una funzione (senza dimostrazione, ma con spiegazione geometrica). Funzioni strettamente convesse. Monotonia del rapporto incrementale per una funzione convessa ed esistenza della derivata sinistra e destra per una funzione convessa nei punti interni all'intervallo di definizione (senza dimostrazione, ma con spiegazione geometrica). Continuità di una funzione convessa nei punti interni all'intervallo di definizione. Esempio di funzione convessa che in uno degli estremi dell'intervallo di definizione è non continua.

27) Giovedì 15 Dicembre 2011

Caratterizzazione della convessità attraverso la monotonia della derivata prima e caratterizzazione della convessità attraverso il segno della derivata seconda (senza dimostrazione, ma con la spiegazione geometrica). Definizione di punto di flesso. Condizione necessaria perché un punto sia di flesso ed esempio di funzione la cui derivata seconda si annulla in un punto che non è di flesso. Esercizi sullo studio di funzioni e sull'applicazione della Formula di Taylor.

28) Lunedì 19 Dicembre 2011

Formula di Taylor con il resto di Peano (senza dimostrazione) ed esercizi sull'uso della Formula di Taylor con il resto di Peano. Sviluppo della funzione binomiale $(1+x)^\alpha$, con $-1 < x < 1$ (senza

dimostrazione). Successioni definite per ricorrenza (caso della funzione generatrice crescente) ed esempi.

29) Martedì 20 Dicembre 2011

Successioni definite per ricorrenza (caso della funzione generatrice decrescente) ed esempi. Esercizi sull'uso del calcolo differenziale per lo studio di problemi di varia natura.

30) Lunedì 9 Gennaio 2012

Definizione di primitiva. Funzioni dotate di primitive e funzioni prive di primitive. Calcolo di tutte le primitive di una funzione definita in un intervallo e della quale è nota una primitiva (con dimostrazione). Osservazioni importanti sulle primitive di funzioni definite in un solo intervallo o nell'unione di intervalli a due a due privi di punti comuni. Integrale indefinito. Integrali immediati (si veda la Tabella 1 del libro di testo). Esempi. Integrazione per decomposizione in somma. Integrazione del prodotto di una funzione costante non nulla e di una funzione dotata di primitive. Calcolo dell'integrale indefinito di un polinomio. Teorema di Integrazione per Parti (con dimostrazione). Esempi di applicazione dei metodi precedenti al calcolo di integrali indefiniti.

31) Martedì 10 Gennaio 2012

Esempio di funzione avente discontinuità di terza specie e dotata di primitive ed esempio di funzione avente discontinuità di terza specie e priva di primitive (con dimostrazione). Determinazione di alcune formule di iterazione per il calcolo di integrali (si vedano gli esempi presenti nel paragrafo 3, Capitolo 8, del libro di testo). Calcolo di integrali attraverso il Teorema di Integrazione per Parti. Primo Teorema di Integrazione per Sostituzione (per la dimostrazione si veda nelle lezioni successive). Applicazioni al calcolo di alcuni integrali (quasi) immediati (si veda anche la Tabella 2 del libro di testo). Determinazione di alcune formule di iterazione per il calcolo di integrali (si vedano gli esempi presenti nel paragrafo 4, Capitolo 8, del libro di testo). Calcolo di integrali attraverso il Primo Teorema di Integrazione per Sostituzione. Calcolo dell'integrale del quoziente fra un polinomio di primo grado ed uno di secondo avente discriminante maggiore di zero od uguale a zero.

32) Giovedì 12 Gennaio 2012

Calcolo dell'integrale del quoziente fra un polinomio di primo grado ed uno di secondo avente discriminante minore di zero. Calcolo dell'integrale del quoziente fra un polinomio di primo grado ed uno di grado superiore al secondo, ma decomponibile nel prodotto di polinomi di primo grado e di secondo con discriminante negativo (in qualche caso particolare). Secondo Teorema di Integrazione per Sostituzione (senza dimostrazione) ed applicazione allo studio di integrali contenenti radicali il cui radicando è quoziente di polinomi di primo grado. Esempi.

33) Lunedì 16 Gennaio 2012

Dimostrazione del Primo Teorema di Sostituzione. Integrazione di funzioni contenenti radicali con radicandi uguali a polinomi di secondo grado, di funzioni razionali contenenti funzioni trigonometriche (caso di esponenti pari e caso di esponenti dispari), di funzioni contenenti esponenziali con opportune sostituzioni attraverso l'uso del Secondo Teorema di Integrazione per Sostituzione. Integrazione di $\cos(px)\cos(qx)$, $\cos(px)\sin(qx)$, $\sin(px)\sin(qx)$. Esempi. Esempi di funzioni non calcolabili elementarmente (si veda anche il libro di testo, Capitolo 8).

34) Martedì 17 Gennaio 2012

Integrale di Riemann (definizione). Primi esempi. Proprietà (senza dimostrazioni. Si veda il libro per un elenco completo). Significato geometrico. Classi di funzioni integrabili secondo Riemann (funzioni continue, monotone, generalmente continue e limitate. Senza dimostrazione). Integrale definito: definizione e proprietà (si veda il libro di testo per un elenco completo). Teorema della Media (dimostrazione e sua interpretazione geometrica).

36) Giovedì 19 gennaio 2012

Funzione integrale. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale (o di Derivazione della Funzione Integrale di una funzione continua), con dimostrazione ed interpretazione geometrica. Corollario sul calcolo dell'integrale definito di una funzione continua attraverso l'uso di primitive. Esempi. Integrale improprio di prima specie (definizione ed esempi).

37) Lunedì 23 Gennaio 2012

Proprietà dell'integrale improprio di prima specie (Linearità, Teorema del Confronto e Corollario, Funzione Campione. Assoluta Sommabilità, Criterio dell'Integrale. Significato geometrico. Tutto senza dimostrazioni). Integrale improprio di seconda specie (Definizione. Linearità, Teorema del Confronto e Corollario, Funzione Campione. Assoluta Sommabilità. Uso dell'integrale improprio di seconda specie per il calcolo dell'integrale di Riemann di funzioni non continue. Significato geometrico. Tutto senza dimostrazioni). Numeri complessi. Somma e prodotto di numeri complessi. Legge di annullamento del prodotto. Proprietà delle operazioni elementari (senza dimostrazione). Teorema Fondamentale dell'Algebra (senza dimostrazione). Impossibilità di rendere \mathbb{C} un campo totalmente ordinato come \mathbb{R} (senza dimostrazione). Piano di Argand-Gauss. Forma algebrica ed operazioni elementari in forma algebrica. Numero complesso coniugato. Modulo di un numero complesso e sue proprietà (senza dimostrazioni). Argomento o anomalia di un numero complesso. Forma trigonometrica.