FACOLTÀ DI SCIENZE MM. FF. NN.

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA

PROGRAMMA DEL CORSO DI FORMAZIONE ANALITICA (A-E)

Prof. G. Emmanuele

N.B. Tutti i riferimenti successivi sono al testo

G. Emmanuele, Analisi Matematica I, Foxwell and Davies Italia, 2003

Capitolo 1. Rappresentazione decimale dei numeri reali. Uguaglianza. Ordinamento. Valore assoluto e prime proprietà. Funzioni e successioni (definizione). Successioni stabilizzate (Lemmi 2.1 e 2.2). Le operazioni elementari fra numeri reali positivi. Proprietà del valore assoluto. Le operazioni elementari fra numeri reali. Principio di Induzione (con applicazioni alla Disuguaglianza di Bernoulli ed alla Successione geometrica). Binomio di Newton*. Proprietà di Archimede. Densità di $\mathbb{Q}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. L'equazione $x^n = a$. Radice n-esima aritmetica*. Potenze con esponente in $\mathbb{Q}$ e proprietà*. Logaritmi e proprietà*. Insiemi limitati: minoranti e maggioranti, minimo e massimo, estremo inferiore e superiore. Esistenza di inf e sup. Completezza secondo Dedekind. Proprietà caratteristiche di inf e sup. Funzioni reali di variabile reale. Campo di esistenza. Esempi e funzioni elementari. Funzioni composte. Funzioni pari, dispari, periodiche. Funzioni limitate e nozioni correlate (min. e max. assoluto, punti di min. e max. assoluto, inf. e sup.). Funzioni iniettive, suriettive, biettive. Funzioni invertibili e funzione inversa.

Capitolo 2. Definizione di numeri complessi. Uguaglianza. Operazioni. Coniugato. Forma algebrica. Impossibilità di rendere $\mathbb{C}$ campo totalmente ordinato. Modulo e anomalìa. Forma trigonometrica. Formula di De Moivre. Esistenza delle radici n-esime e relativa formula di calcolo. Polinomi in $\mathbb{C}$. Teorema di Ruffini*. Teorema Fondamentale dell'Algebra*. Decomposizione di funzioni razionali fratte in fratti semplici*.

Capitolo 3. Distanza in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$. Proprietà. Intorni sferici. Punti interni, esterni, di accumulazione, di frontiera, isolati. Insiemi aperti, chiusi e loro proprietà. Interno, chiusura, frontiera, derivato di un insieme. Proprietà* (Proposizione 1.2 - Esercizio 1.11). Teorema di Heine-Borel (nel Paragrafo 1). Insiemi limitati in $\mathbb{R}$ ed in $\mathbb{R}^2$. Successioni. Limite di una successione. Teorema di Unicità del Limite. Teorema di Permanenza del Segno. Teorema del Confronto. Limiti di successioni monotòne. Limitatezza di successioni convergenti. Successione $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Successioni estratte e Teoremi relativi. Operazioni con i limiti di successioni*.

Forme indeterminate. Teorema di Bolzano-Weierstrass (prima dimostrazione) e Corollario 4.1. Criterio di convergenza di Cauchy. Completezza secondo Cauchy. Completezza secondo Dedekind e completezza secondo Cauchy. Limiti notevoli ($\lim_n \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$ con $\lim_n x_n = 0$, $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim_n A^n$, $\lim_n \frac{A^n}{n^b}{}^*$ con $A \in \mathbb{R}, b > 0$). Esercizio 7.9 e Proposizione 7.5*. Teoremi 7.6. Corollario 7.7, Teorema 7.9, Teorema sulla successione delle medie geometriche, Corollario 7.10 (tutti nel caso di successioni regolari, tutti *).

Capitolo 4. Definizione di serie numerica e di carattere di una serie. Serie costante, serie telescopiche, serie geometrica, serie armonica. Criterio di Convergenza di Cauchy per le serie e Corollario 1.2. Proposizione 1.4*. Serie a termini di segno costante. Criterio del Confronto e Corollari. Criterio del Rapporto e Corollario. Criterio della Radice e Corollario. Criterio di Raabe e Corollario. Criterio di Condensazione di Cauchy*. Serie armonica generalizzata. Maggiorazione dell'errore. Serie a termini di segno alterno. Teorema di Leibnitz. Maggiorazione dell'errore nel Teorema di Leibnitz. Assoluta convergenza. L'assoluta convergenza implica la convergenza.

Capitolo 5. Limiti di funzioni. Legame fra i limiti di funzioni e limiti di successioni (Teorema 1.1*). Teoremi sui limiti (tutti senza dimostrazione): Teorema di Unicità del Limite - Teorema di Permanenza del Segno - Teorema del Confronto - Limitatezza locale di funzioni convergenti - Criterio di convergenza di Cauchy - Operazioni con i limiti di funzioni - Forme indeterminate. $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{A(x)}{B(x)}$. Altri limiti notevoli*. Asintoti. Limiti di funzioni composte*. Limiti di funzioni monotone*. Funzioni $\arcsin x$, $\arccos x$, $\mathrm{arctg} x$. Funzioni continue. Composizione di funzioni continue. Teorema di Esistenza degli Zeri. Teorema dei Valori Intermedi* e suo significato. Teorema di Weierstrass. Punti di discontinuità. Punti di discontinuità delle funzioni monotone*. Successione definite per ricorrenza.

Capitolo 6. Motivazioni fisica e geometrica per l'introduzione del concetto di derivata. Definizione di derivata in un punto. Calcolo della derivata delle funzioni elementari in un punto. Funzione derivata. Derivate successive. Derivabilità e continuità. Significato geometrico del limite del rapporto incrementale (Retta tangente, punti angolosi, cuspidali, di flesso a tangente verticale). Derivabilità della funzione combinazione lineare, della funzione prodotto, della funzione reciproca, della funzione quoziente. Derivabilità di funzioni composte* e di funzioni inverse*. Punti di estremo relativo. Teorema di Fermat. Condizione sufficiente per l'esistenza di punti di estremo relativo*. Teorema di Rolle (e suo significato geometrico), Teorema di Cauchy Teorema di Lagrange (e suo significato geometrico). Loro equivalenza. Corollari 7.4 e 7.7. Condizione caratteristica per la monotonìa*. Condizione caratteristica per la stretta monotonìa*. Applicazioni allo studio di identità e di disequazioni. Teoremi di De L'Hopital*.

Capitolo 7. Definizione di funzione convessa e funzione concava. Enunciati e interpretazione geometrica della Proposizione 1.1, del Teorema 1.2, della Proposizione 1.3, del Teorema 2.1. Funzioni strettamente convesse e funzioni strettamente concave. Caratterizzazione della convessità (o della concavità) per funzioni derivabili una volta* e per funzioni derivabili due volte*. Punti di flesso e condizione necessaria per la loro esistenza*. Studio di funzioni.

Capitolo 8. Primitive. Determinazione di tutte le primitive di funzioni definite in un intervallo e nell'unione di intervalli a due a due disgiunti. Integrale indefinito. Proprietà*. Integrazione per parti* e applicazioni. Primo Teorema di Sostituzione* e applicazioni. Ricerca delle primitive delle funzioni razionali fratte. Secondo Teorema di Sostituzione*. Applicazioni del Secondo Teorema di Sostituzione al calcolo dell'integrale di funzioni del tipo $R(e^x)$, $R\left(\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$, $R(\sin^2 x, \cos^2 x,\ 2\sin x\cos x)$, $R(\sin x, \cos x)$, $R(\sqrt{ax^2+bx+c})$, essendo R una funzione razionale fratta.

Capitolo 9. Definizione di Integrale di Riemann. Proprietà*. Integrabilità di funzioni continue*, monotòne*, generalmente continue e limitate*. Teorema della Media. Integrale definito e proprietà*. Funzione integrale. Teorema di Derivabilità della Funzione Integrale. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Corollario sul calcolo dell'integrale di Riemann di una funzione continua. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. Integrali impropri. Proprietà*. Assoluta integrabilità ed integrabilità per gli integrali impropri*. Teorema del Confronto e Corollario*. Criterio dell'Integrale*. Significato geometrico dell'integrale improprio*.

Capitolo 10. Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti non (necessariamente) costanti. Equazioni differenziali lineari di ordine $n, n \in \mathbb{N}$, a coefficienti costanti.

Le dimostrazioni relative agli argomenti contrassegnati con l'asterisco possono essere omesse